

SÉRIE A, N° 3303

N° D'ORDRE : 4175

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Monique LAFON, née AUGÉ

1^{re} THÈSE. — Application de l'algèbre aux plans d'expérience : Constructions de blocs incomplets partiellement équilibrés et analyse de la variance.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 30 mai 1958 devant la Commission d'examen

MM. G. DARMOIS, *Président.*

GARNIER
DUGUE

} *Examineurs.*

SÉRIE A, N° 3303

N° D'ORDRE : 4175

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Monique LAFON, née AUGÉ

1^{re} THÈSE. — Application de l'algèbre aux plans d'expérience : Constructions de blocs incomplets partiellement équilibrés et analyse de la variance.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 30 mai 1958 devant la Commission d'examen

MM. G. DARMOIS,	<i>Président.</i>
GARNIER	} <i>Examineurs.</i>
DUGUE	

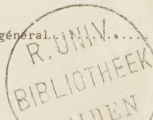
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÉS

- PROFESSEURS -

G. JULIA	T Analyse sup. & Alg. sup.	FELDMANN	T Biologie (P.C.B.).
FOCH	T Méc. physique & expérim.	GUINIER	T Physique des solides (P.C.B.).
PAUTHENIER	T Electrotechnique Gle.	JOST	T Physiologie comparée
DE BROGLIE	T Théories physiques.	FORTET	T Calc. des probabilités.
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées.	SCHWARTZ	T Calc. diff. et intégral.
GARNIER	T Géométrie supérieure	CHOUARD	T Physiologie Végétale.
PERES	T Mécan. des fluides et applications.	MALAVARD	T Aviation.
LAUGIER	T Physiologie générale.	BRELOT	T Calcul différentiel.
M. CURIE	T Physique (S.P.C.N.).	NORMANT	T Chimie organique (P.C.B.).
BARRABE	T Géol. struct. & Géol. appliquée.	BENARD	T Chimie (P.C.B.).
G. DARMOIS	T Calcul des probab. et physique Math.	BUVAT	T Botanique (E.N.S.).
J. BOURCART	T Géogr. phys. & Géol. dynamique.	DUGUE	T Statistiques mathém.
PLANTEFOL	T Botanique.	GELOSO	T Chimie (S.P.C.N.).
GRASSÉ	T Evol. des êtres organ.	SOULAIRAC	T Psychophysiologie.
PREVOST	T Chimie organique.	ULRICH	T Physiol. Végétale.
BOULIGAND	T Appl. de l'analyse à la Géométrie.	MARECHAL	T Optique théorique et appliquée.
CHAUDRON	T Chimie appliquée.	KIRRMANN	T Théories chimiques.
WYART	T Minéralogie.	CHADEFAUD	T Botanique.
TEISSIER	T Zoologie.	DESTRIAU	T Physique (M.P.C.).
MANGENOT	T Biologie végétale.	Mlle LE BRETON	T Physiologie générale.
P. AUGER	T Physique quantique et Relativité.	SALEM	T Mathém. générales.
MONNIER	T Physiol. générale.	LELONG	T Mathém. générales.
PIVETEAU	T Paléontologie.	DEVILLERS	T Anatomie et Histologie comparées.
ROCARD	T Physique (E.N.S.).	EHRESMANN	T Topologie Algébrique.
H. CARTAN	T Mathématiques (E.N.S.).	FRANÇON	T Physique (S.P.C.N.).
LAFFITTE	T Chimie Générale.	GLANGEAUD	T Géogr. physique et Géol. dynamique.
FAVARD	T Géométrie supér.	GODEMENT	T Mathématiques (M.P.C.).
COULOMB	T Physique du Globe.	PISOT	T Calcul des Probabilités.
Mlle COUSIN	T Biologie animale (S.P.C.N.).	ROCH (E.)	T Géologie.
CHRETIEN	T Chimie minérale.	SCHATZMANN	T Astrophysique.
P. DRACH	T Zoologie.	TERMIER	T Paléontologie stratigr.
KASTLER	T Physique.	ZAMANSKY	T Mathém. générales.
EPHRUSSI	T Génétique.	LENNUIER	T Physique (P.C.B.).
WURMSER	T Biol. physico-chimique.	RIZET	T Génétique.
RIVIERE	T Géologie (S.P.C.N.).	ROUTHIER	T Géologie Appliquée.
GAUTHERET	T Biol. Végétale (P.C.B.).	Mme TONNELAT	T Théories physiques.
LUCAS	T Recherches physiques.	DIXMIER	T Mathématiques (M.P.C.).
A. THOMAS	T Biologie cellulaire.	SOUCRAY	T Chimie générale.
ARNULF	T Optique appliquée.	AIGRAIN	T Physique (P.C.B.).
M. MORAND	T Enseignement de phys.	BRUSSET	T Chimie Minérale.
SOLEILLET	T Physique.	M. LEVY	T Physique théorique.
FORTIER	T Mécanique exper. des fluides.	LENORMANT	T Physiologie.
DANJON	T Astronomie.	Mme CHAIX	T Biol. Végétale (P.C.B.).
LAPORTE	T Phys. générale & Radioactivité.	Mme HUREL-PY	T Chimie (P.C.B.).
JANET	T Mécan. anal. et Mécanique céleste.	PIAUX	T Chimie (P.C.B.).
PETIT	T Biol. maritime.	BRUN	T Méc. exper. des fluides.
QUENEY	T Météorologie et dyn. atmosphérique.	LEDERER	T Chimie biologique.
GALLIEN	T Embryologie.	Mme DUBREIL	T Mathématiques.
EICHHORN	T Biol. Vég. (S.P.C.N.).	Mlle LELONG	T Mathématiques (E.N.S.).
DE CUGNAC	T Biol. Vég.	BELLAIR	T Géologie (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS	T Chimie Physique.	COTTE	T Physique (M.P.C.).
THELLIER	T Physique du Globe.	DUBOIS J. E.	T Chimie (S.P.C.N.).
L'HERITIER	T Génétique.	LAMOTTE	T Zoologie (E.N.S.).
GRIVET	T Radioélectricté.	MICHEL	T Chimie (S.P.C.N.).
PONCIN	T Méc. générale.	OLMER	T Energétique générale.
DUBREIL	T Arith. & théorie des nombres.	ROUAULT	T Physique générale.
QUELET	T Chimie organique.	GAUTHIER	T Mécanique appliquée.
CAGNIARD	T Géophysique appliquée.	BARCHIEWITZ	T Chimie Physique.
CHAMPETIER	T Chimie macromolécul.	BROSSEL	T Physique Atomique.
CUVILLIER	T Géol. struct. et Géol. appliquée.	BUSER	T Biologie Animale (P.C.B.).
JUNG	T Pétrographie.	CAMUS	T Biologie Végétale (P.C.B.).
TRILLAT	T Microscopie et diff. électronique.	CASTAING	T Physique Générale.
WIEMANN	T Chimie organique et structurale.	CURIEN	T Minéralogie et Cristallog.
JACQUINOT	T Spectroscopie et Phys. céleste.	MOYSE	T Physiologie Végétale.
VASSY	T Phys. de l'atmosphère.	NOIROT	T Evolution des Etres organ.
DESTOUCHES	T Théories physiques.	PANNETIER	T Chimie (P.C.B.).
M. PRUVOST	T Géologie.	POSSOMPES	T Biologie Animale (P.C.B.).
AMIEL	T Chimie générale (P.C.B.).	PULLMANN	T Chimie théorique.
HOCART	T Minéralogie.	TEILLAC	T Physique Nucléaire et Radioactivité.
J. P. MATHIEU	T Physique (P.C.B.).	TONNELAT	T Biologie physico-chimique
COUTEAUX	T Biol. animale (P.C.B.).	VILLE	T Econométrie
MAY	T Biol. animale (P.C.B.).	WILLEMART	T Chimie (P.C.B.).
CHOQUET	T Calc. différentiel et Intégral.	DODE	T Chimie
		FREYMAN	T Physique (S.P.C.N.).
		GUINOCHET	T Biologie Végétale (Orsay).
		ROLLET	T Chimie (P.C.B.).
		Mlle JOSIEN	T Chimie (P.C.B.).
		CHEVALLEY	T Géométrie Algébrique et théorie des groupes.
		DESNUELLE	T Chimie biologique.

Secrétaire général Ch. MONIER



**APPLICATION DE L'ALGÈBRE
AUX PLANS D'EXPERIENCES : CONSTRUCTIONS
DE BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT
ÉQUILIBRÉS ET ANALYSE DE LA VARIANCE**

Monique LAFON-AUGÉ

u/b



Digitized by the Internet Archive
in 2026

INTRODUCTION

Le problème du plan d'expérience et de son analyse statistique a été introduit et étudié par Sir R. A. Fisher. Il a proposé plusieurs types de plans d'expérience ; F. Yates en a découvert d'autres, en particulier le "Bloc Incomplet Equilibré". R. C. Bose et l'école indienne ont continué l'étude des blocs incomplets et ont introduit le "Bloc Incomplet Partiellement Equilibré" qui sera l'objet de cette étude.

Dans le domaine des recherches agricoles, de la biologie animale, les plans d'expérience sont d'un emploi courant : pour comparer, par exemple, le rendement de diverses variétés de blé plantées dans un terrain connu, ou l'effet de divers traitements sur la quantité de lait produite par des vaches appartenant à plusieurs races, ou encore l'effet de divers régimes alimentaires sur de jeunes bestiaux, etc.

Nous emploierons la terminologie de R. C. Bose qui est celle empruntée aux problèmes de recherches agronomes :

Le terme variété désignera les quantités dont on expérimente les effets, variétés de blé ou traitements alimentaires dans les exemples donnés.

Le terme bloc désignera le groupe d'unités sur lequel agissent les variétés, bloc de terrain divisé en parcelles ou groupe d'animaux.

Un des premiers plans d'expérience introduits est le "Bloc complet" où toutes les variétés sont réparties au hasard dans chaque bloc. Ce plan d'expérience nécessite dans un bloc autant de parcelles que de variétés, donc un grand nombre d'expériences et, quand le nombre de variétés est élevé, un grand nombre de parcelles dans chaque bloc ce qui est parfois impossible surtout dans le domaine de la biologie animale.

De plus il n'existe pas d'analyse mathématique rigoureuse de ce

plan d'expérience (il n'est pas tenu compte par exemple de la variation de fertilité du sol).

Pour toutes ces raisons d'autres plans d'expérience lui sont substitués la plupart du temps.

Les carrés latins orthogonaux permettent de construire des plans d'expérience préférables aux précédents.

Leur analyse est rigoureuse et permet de tenir compte de la variation de qualité des blocs et parcelles.

Cependant il est parfois impossible de l'utiliser puisque le problème de la construction des carrés latins orthogonaux n'est pas résolu pour tous les nombres.

Chaque variété est répétée autant de fois qu'il y a de variétés à expérimenter, ce qui nécessite beaucoup de temps et de dépenses quand le nombre total de variétés est élevé.

Très souvent, dans les expériences biologiques en particulier, le nombre de parcelles de chaque bloc est imposé. C'est le nombre d'animaux d'une même portée par exemple.

Il est donc nécessaire d'utiliser un plan d'expérience où chaque bloc ne contient pas toutes les variétés. Les "Blocs Incomplets" ont été introduits pour remplir ces conditions.

Tout d'abord le "Bloc incomplet équilibré" qui est le plus simple et le plus pratique : l'analyse en est facile et la comparaison des deux variétés a la même précision pour n'importe quel couple, le nombre de répétition de chaque variété est laissé libre.

Cependant la construction de plan d'expérience de ce type n'est pas donné par un procédé formel : il n'existe aucune règle exhaustive de construction. Nous ne connaissons pas de groupe de conditions nécessaires et suffisantes pour construire un bloc incomplet équilibré.

De plus l'emploi du bloc incomplet équilibré est parfois incommode : Sir R. A. Fisher a démontré (Ann. of Eugénics 1940) que la construction d'un bloc incomplet équilibré n'était possible que si le nombre de bloc était au moins égal au nombre de variétés, ce qui nécessite un grand nombre d'expériences. De plus, pour certaines valeurs du nombre de variétés, la construction d'un bloc incomplet équilibré exige un trop grand nombre de répétitions : par exemple, pour huit variétés et des blocs de trois parcelles, le plus petit nombre de répétition est vingt et un.

Pour lever ces difficultés, R. C. Bose et Nair introduisent en 1939 une nouvelle catégorie de plan d'expérience : le bloc incomplet partiellement équilibré à deux classes associées, qui comprend comme cas particulier le bloc équilibré. En 1952, Bose et Shimamoto donnent la définition la plus générale, du bloc incomplet partiellement équilibré à m classes associées.

L'objet essentiel de cette thèse est d'étudier des constructions, des conditions d'existence de tels plans d'expérience et d'établir l'analyse de la variance dans le cas le plus général.

Dans un chapitre préliminaire nous rappellerons, avec la définition, toutes les relations existant, dans le cas le plus général, entre les paramètres du plan d'expérience.

Le premier chapitre sera relatif à la construction dans le cas où le nombre de classes associées est supérieur à deux. Nous généraliserons une construction donnée dans le cas de deux classes associées, ayant pour base les géométries projectives finies. Nous l'étudierons en détail dans le cas de la géométrie à trois dimensions construite sur le corps de Galois à 4 éléments. Ensuite nous donnerons une méthode de construction de plan d'expérience cyclique et de plan d'expérience quasifactoriel à n dimensions.

Les deux chapitres suivants étudieront le cas particulier de deux classes associées.

Dans le chapitre deux, nous rappellerons les travaux de Connor et Clatworthy sur la matrice d'incidence d'un bloc incomplet partiellement équilibré, puis nous établirons des conditions d'existence de tels plans d'expérience dans le cas où le nombre de blocs est inférieur au nombre de variétés.

Dans le chapitre trois, nous dresserons la liste de tous les blocs présentant quatre répétitions ; certains figurent dans la classification établie par Bose Clatworthy et Shimamoto, d'autres étaient encore inconnus. Pour ces derniers nous donnerons les schémas d'association, il nous est apparu au cours de ce travail qu'il pouvait exister d'autres schémas que ceux envisagés par les auteurs de la classification ; nous les décrirons.

Dans le chapitre quatre, nous établirons suivant la méthode générale donnée par Rao, l'analyse de la variance "intra-inter bloc" et la valeur du coefficient d'efficacité, en mettant en évidence les fonctions des paramètres de seconde espèce qui interviennent dans cette analyse. Puis, sous certaines conditions, nous établirons l'analyse

"intra bloc" dans le cas où tout un bloc manque dans le plan d'expérience, ce cas pouvant se présenter dans la pratique quand le bloc est une unité expérimentale.

Les principaux résultats ont été donnés dans 3 notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

Je suis heureuse de pouvoir exprimer ici toute ma reconnaissance à M. Dugué sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour ; pour les très nombreux entretiens qu'il a bien voulu m'accorder, pour ses nombreux conseils, et toutes les améliorations qu'il a apportées à ces travaux.

Que M. G. Darmois, dont les encouragements m'ont été si utiles et qui a bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury de thèse, veuille trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie également M. Garnier qui a accepté de me proposer un sujet de seconde thèse et de faire partie du jury.

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE

Pour comparer v variétés dans des plans d'expérience formés de blocs de k parcelles, où k est inférieur à v , nous disposons de deux types de plans d'expérience :

- les "Blocs Incomplets Equilibrés" ;
- les "Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés".

Le Bloc Incomplet Equilibré est le plus simple des deux et le plus efficace lorsqu'il existe. Nous allons donner un exemple de plan de ce type.

Considérons 6 variétés, 1, 2, 3, 4, 5, 6 réparties en blocs de 3 parcelles de la façon suivante :

1	2	3	2	3	6
1	2	4	2	3	5
1	3	5	2	5	6
1	4	6	3	4	5
1	5	6	3	4	6

Nous remarquons que chaque variété apparaît 5 fois, et que chaque couple de variétés apparaît dans 2 blocs.

Les plans d'expérience possédant ces propriétés :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) le nombre de répétitions de chaque variété est indépen-} \\ \text{dant de la variété,} \\ \text{b) le nombre } \lambda_{ij} \text{ de blocs contenant le couple de variétés} \\ v_i v_j \text{ est indépendant de } i \text{ et } j, \end{array} \right.$$

sont appelés "Blocs Incomplets Equilibrés".

Nous allons donner la définition générale en utilisant les notations suivantes :

v	nombre de variétés,
b	" " blocs,
k	" " parcelles dans chaque bloc,
r	" " répétition de chaque variété,
λ	" " blocs contenant un couple de variétés.

Définition d'un Bloc Incomplet Equilibré.

Un bloc Incomplet Equilibré est un arrangement de v variétés en b blocs de k parcelles chacun, tel que :

- 1/ Chaque variété apparaisse au plus une fois dans chaque bloc.
- 2/ Chaque variété est répétée r fois.
- 3/ Chaque variété v_i apparaît avec la variété v_j dans λ blocs, étant indépendant de v_i et v_j .

Relations entre les paramètres.

Les paramètres v , b , r , k , λ , ne sont pas indépendants.

Le nombre d'expériences faites est égal au nombre total de parcelles : bk , ou au nombre total de variétés distinctes ou non : vr .

$$vr = bk$$

- Chaque variété v_i apparaît dans r blocs. Ces r blocs contiennent $r(k-1)$ variétés différentes de v_i , de plus v_i apparaît avec chacune λ fois :

$$r(k-1) = \lambda (v-1)$$

- Sir R. A. Fisher a démontré qu'il était nécessaire que

$$b \geq v$$

et R. C. Bose, dans le cas où b est de la forme $b = rn$ et où le bloc est "résolvable", a démontré l'inégalité plus forte :

$$b \geq v + r - 1$$

CONSTRUCTIONS DE BLOCS INCOMPLETS – ANALYSE DE VARIANCE

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour assurer l'existence d'un tel plan d'expérience. Un groupe de conditions nécessaires et suffisantes reste encore inconnu.

Nous allons rappeler les principales méthodes de constructions de Blocs Incomplets Équilibrés.

Constructions de Blocs Incomplets Équilibrés.

1/ Un premier groupe de Blocs Incomplets Équilibrés est obtenu en prenant comme variétés les points d'une géométrie projective finie de dimension m construite sur le corps de Galois à p^n éléments (p nombre premier), et comme blocs les géométries projectives finies de dimensions, $s < m$, contenues dans la précédente.

Il est facile de démontrer que les paramètres ainsi définis vérifient les relations et conditions précédentes.

2/ Un deuxième groupe de Blocs Incomplets Équilibrés est obtenu, de façon analogue, à partir des géométries euclidiennes finies.

3/ Bose a donné une autre construction, utilisant les groupes abéliens additifs; il a pu ainsi établir une liste systématique et presque exhaustive de ces plans d'expérience.

Les Blocs Incomplets Partiellement Équilibrés sont une généralisation des Blocs Incomplets Équilibrés.

Ils existent dans des cas où il n'existe pas de Blocs Incomplets Équilibrés, par exemple pour $b < v$; ou bien ils existent avec un nombre de répétition inférieure à celui du bloc équilibré, par exemple pour $v = 8$, $k = 3$, la plus petite valeur de r est 21 dans le bloc équilibré, et 3 dans un bloc partiellement équilibré.

R. C. Bose et K. R. Nair ont donné les premiers la définition d'un Bloc Incomplet Partiellement Équilibré à 2 classes associées seulement. Nous allons l'énoncer et l'illustrer d'un exemple.

Définition.

Un Bloc Incomplet Partiellement Équilibré à 2 classes associées est un arrangement de v variétés en b blocs de k parcelles chacun, tel que :

1/ Chaque variété apparaisse une fois au plus dans chaque bloc.

2/ Chaque variété apparaisse exactement r fois dans l'ensemble du plan d'expérience.

3/ Il existe une relation d'association entre 2 variétés quelconques, satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) Deux variétés v_i et v_j sont premières ou deuxièmes associées.
- b) Chaque variété a n_1 premières associées et n_2 deuxièmes associées; n_1 et n_2 étant indépendants de la variété initiale.
- c) Deux variétés i èmes associées apparaissent ensemble dans λ_i blocs ($i = 1, 2$).
- d) Soient deux variétés i èmes associées le nombre de variétés i èmes associées de la première et j èmes associées de la seconde est p_{ij}^u ($u, i, j = 1, 2$). Ce nombre est indépendant du couple initial.

Il est évident que nous avons là, une généralisation du bloc équilibré. En effet, quand $\lambda_1 = \lambda_2$ les deux classes d'association se confondent, et nous retrouvons la définition du bloc équilibré.

Relations entre les paramètres.

En raisonnant comme pour le bloc équilibré, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} v &= n_1 + n_2 + 1 \\ vr &= bk \\ n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 &= r(k-1) \end{aligned}$$

De plus, n_u étant une constante

$$\begin{aligned} p_{ij}^u &= p_{ji}^u \\ n_u p_{ij}^u &= n_j p_{ui}^j = n_i p_{ju}^i \\ p_{i1}^u + p_{i2}^u &= n_i - \delta_i^u \end{aligned}$$

Exemple.

Considérons le bloc incomplet partiellement équilibré, à deux classes associées, ayant pour paramètres :

$$\begin{cases} v = 9 = b, & k = 3 = \Gamma \\ n_1 = 6, & n_2 = 2, & \lambda_1 = 1, & \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

et pour paramètres p :

$$p_{11}^1 = 3, \quad p_{12}^1 = 2, \quad p_{22}^1 = 0, \quad p_{11}^2 = 6, \quad p_{12}^2 = 0, \quad p_{22}^2 = 1$$

le tableau d'association est le suivant :

<u>variété</u>	<u>premières associées</u>						<u>deuxièmes associées</u>	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	3	4	5	6	7	1	9
9	2	3	4	5	6	7	1	8
2	1	3	4	5	8	9	6	7
6	1	3	4	5	8	9	2	7
7	1	3	4	5	8	9	2	6
3	1	2	6	7	8	9	4	5
4	1	2	6	7	8	9	3	5
5	1	2	6	7	8	9	3	4

Le plan d'expérience a pour schéma :

1	2	3		6	8	3		7	9	3
1	6	4		6	9	5		2	8	5
1	7	5		7	8	4		2	9	4

Nous pouvons vérifier qu'il possède les propriétés énoncées dans la définition.

R. C. Bose et K. R. Nair ont généralisés ces plans d'expérience en considérant un nombre quelconque de classes d'association.

Définition générale d'un Bloc Incomplet Partiellement Equilibré.

Un Bloc Incomplet Partiellement Equilibré à m classes associées, est un arrangement de v variétés en b blocs de k parcelles chacun, tel que :

1/ Chaque variété apparaisse au plus une fois dans chaque bloc.

2/ Chaque variété apparaisse exactement r fois dans l'ensemble du plan d'expérience.

3/ Il existe une relation d'association entre 2 variétés quelconques, satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) Deux variétés v_i et v_j sont premières, deuxièmes, ... ou m èmes associées.
- b) Chaque variété à n_u u èmes associées, n_u étant indépendant de la variété initiale.
- c) Deux variétés i èmes associées apparaissent ensemble dans i blocs.
- d) Soient deux variétés u èmes associées, le nombre de variétés i èmes associées de la première et j èmes associées de la seconde, est p_{ij}^u

$$(u, i, j = 1, 2, \dots, m)$$

Ce nombre est indépendant du couple initial.

Les nombres $v, b, r, k, n_i, \lambda_i$, sont appelés paramètres de première espèce, ce sont des entiers positifs.

Les nombres p_{ij}^u paramètres de deuxième espèce, ce sont des entiers positifs ou nuls.

Relations entre les paramètres.

Le nombre d'expériences faites est égal au nombre total de parcelles : bk , ou au nombre total de variétés distinctes ou non : vr

$$vr = bk$$

- Les variétés sont réparties en m classes d'association :

$$v = \sum_{s=1}^m n_s + 1$$

- Le nombre de variétés apparaissant dans les mêmes blocs que v_i peut être calculé de deux façons différentes :

$$r(k-1) = \sum_{s=1}^m n_s \lambda_s$$

- n_u étant une constante :

$$p_{ij}^u = p_{ji}^u \quad (i, j, u = 1, 2, \dots, m)$$

$$n_u p_{ij}^u = n_j p_{ui}^j = n_i p_{ju}^i$$

- Le calcul du nombre de variétés u èmes associées fournit la relation :

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}^u = n_i - \delta_i^u ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_i^u = 0 \text{ si } u \neq i \\ \delta_i^u = 1 \text{ si } u = i \end{array} \right.$$

Remarquons que l'ensemble des paramètres de seconde espèce p_{ij}^u peuvent être écrits sous la forme de m matrices symétriques carrées,

$$p_{ij}^1, p_{ij}^2, \dots, p_{ij}^m, (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Ces notations sont celles de R.C. Bose, elles sont employées dans tous les articles ayant trait à ces plans d'expérience.

CHAPITRE I

CONSTRUCTION DE PLANS D'EXPERIENCE A PLUS DE 2 CLASSES ASSOCIEES

I - CONSTRUCTION UTILISANT LES GEOMETRIES PROJECTIVES FINIES -

Bose et Nair ont donné, en 1939, une construction de blocs incomplets partiellement équilibrés à deux classes associées utilisant comme variétés les points d'une géométrie projective construite sur le corps de Galois à p^n éléments (p premier). Cette construction est elle-même une généralisation de la construction de blocs incomplets équilibrés.

Nous allons donner ici, une construction dans le cas où le nombre de classes associées est 3, et où la dimension de la géométrie projective utilisée est 3.

1/ - Construction générale.

Considérons le corps de Galois à p^n éléments. Un point d'une géométrie projective finie à m dimensions $GP(m, p^n)$ est un ensemble ordonné de $m+1$ éléments du corps de Galois non tous nuls.

Deux ensembles représentent le même point $(g_1, \dots, g_{m+1})$ $(g'_1, \dots, g'_{m+1})$ si $g_i = \mu g'_i$, $i = 1, \dots, m+1$

$$\mu \neq 0 \quad \mu \in (p^n)$$

La droite qui joint deux points p_1 et p_2 est définie comme l'ensemble des points $\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2$

$$\mu_i \in (p^n) \quad \mu_i \neq 0$$

Une $GP(m, p^n)$ a

$1 + p^n + \dots + p^{nm}$ points.

Chaque $GP(m, p^n)$ contient exactement :

$$\frac{(1 + p^n + \dots + p^{nm}) \dots (p^{kn} + \dots + p^{nm})}{(1 + p^n + \dots + p^{kn}) \dots p^{kn}} GP(k, p^n)$$

Chaque $GP(k, p^n)$ d'une $GP(m, p^n)$ donnée est contenue dans

$$\frac{(p^{(k+1)n} + \dots + p^{nm}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{nm})}{(p^{(k+1)n} + \dots + p^{sn}) \dots p^{sn}} GP(s, p^n)$$

avec $s > k$

Si $k = 0$ nous obtenons ainsi le nombre de points d'une $GP(s, p^n)$ contenus dans une $GP(s, p^n)$ donnée.

Si $k = 1$ le nombre de droites d'une $GP(m, p^n)$ contenues dans une $GP(s, p^n)$.

2/ - Construction de blocs incomplets partiellement équilibrés à 3 classes associées.

Considérons une géométrie projective de dimension 3 construite sur le corps de Galois à $p^n = a$ éléments, $GP(3, a)$.

Faisons choix d'un plan Π , et dans ce plan, faisons choix d'une droite D et d'un point A non situé sur D . Remarquons que n'importe quel point de Π , non situé sur D , peut jouer le rôle du point A cela revient à faire une permutation sur les variétés. Nous considérerons les points de $GP(3, a)$ non situés dans Π comme des variétés

$$v = 1 + a + a^2 + a^3 - (1 + a + a^2) = a^3$$

Nous identifierons les blocs avec les plans qui ne passent pas par D .

$$b = \frac{(1 + a + a^2 + a^3) (a + a^2 + a^3) (a^2 + a^3)}{(1 + a + a^2) (a + a^2) a^2} - (1 + a) = a^2 + a^3$$

Chaque bloc $1 + a + a^2$ points moins les points du bloc situés dans Π

$$k = 1 + a + a^2 - (1 + a) = a^2$$

Chaque point est situé dans r plans dont un passant par D

$$r = \frac{(a+a^2+a^3)(a^2+a^3)}{(a+a^2)a^2} - 1 = a + a^2$$

Ces points forment un plan d'expérience, en effet $vr = bk$.

Définition des classes d'association.

Un point M sera premier associé des points de la droite MA

$$n_1 = a - 1.$$

Il sera deuxième associé des points du plan MD

$$n_2 = a^2 - 1.$$

Troisième associé des autres points du plan d'expérience

$$n_3 = a^3 - a^2 - a + 1.$$

Deux points premiers associés apparaissent ensemble dans

$$\lambda_1 = 1 + a \text{ blocs}$$

Deux points deuxièmes associés apparaissent ensemble dans

$$\lambda_2 = a \text{ blocs}$$

Deux points troisièmes associés dans

$$\lambda_3 = 1 + a \text{ blocs}$$

Le plan d'expérience ainsi formé est un bloc incomplet partiellement équilibré à 3 classes associées :

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = r(k-1)$$

$v = a^3$	$n_1 = a - 1$	$\lambda_1 = 1 + a$
$b = a^2 + a^3$	$n_2 = a^2 - 1$	$\lambda_2 = a$
$k = a^2$	$n_3 = a^3 - a^2 - a + 1$	$\lambda_3 = 1 + a$
$r = a + a^2$		

Les paramètres de seconde espèce sont donnés par les matrices:

$$p_{ij}^1 = \begin{pmatrix} n_1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_3-n_2 \end{pmatrix} \quad p_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 \\ 0 & n_2-1 & 0 \\ n_1 & 0 & n_3-n_1 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n_1 \\ 1 & 0 & n_2 \\ n_1 & n_2 & n_3-n_2-n_1-1 \end{pmatrix}$$

3/ - Exemples de construction.

a = 2 ²	v = 64	n ₁ = 3	λ ₁ = 5
	b = 80	n ₂ = 15	λ ₂ = 4
	k = 16	n ₃ = 45	λ ₃ = 5
	r = 20		

a = 3	v = 27	n ₁ = 2	λ ₁ = 4
	b = 36	n ₂ = 8	λ ₂ = 3
	k = 9	n ₃ = 16	λ ₃ = 5
	r = 12		

a = 2	v = 8	n ₁ = 1	λ ₁ = 3
	b = 12	n ₂ = 3	λ ₂ = 2
	k = 4	n ₃ = 3	λ ₃ = 3
	r = 6		

Cette géométrie GP(3, 2) est formée de 15 points.

$$\begin{array}{llll}
 p_1 = 1 & 0 & 0 & 0 \\
 p_2 = 0 & 1 & 0 & 0 \\
 p_3 = 0 & 0 & 1 & 0 \\
 p_4 = 0 & 0 & 0 & 1 \\
 p_5 = 1 & 1 & 0 & 0 \\
 p_6 = 1 & 0 & 1 & 0 \\
 p_7 = 1 & 0 & 0 & 1 \\
 p_8 = 0 & 1 & 1 & 0 \\
 p_9 = 0 & 1 & 0 & 1 \\
 p_{10} = 0 & 0 & 1 & 1 \\
 p_{11} = 1 & 1 & 1 & 0 \\
 p_{12} = 1 & 1 & 0 & 1 \\
 p_{13} = 1 & 0 & 1 & 1 \\
 p_{14} = 0 & 1 & 1 & 1 \\
 p_{15} = 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

- A sera le point p , et D la droite p₂ p₃

- les points de $\square$ a exclure sont : p₅ p₆ p₈ p₁₁

- le point premier associé de p est $p + p_1$
- les 3 points seconds associés de p sont :

$$p = p_2 = q$$

$$p + p_3 = t$$

$$p + q + t$$

Les droites de cette $GP(3, 2)$ sont : (nous remplacerons le point p_i par i)

1 2 5	2 3 8	3 5 11	4 11 15	6 12 14
1 3 6	2 4 9	3 7 13	5 6 8	7 8 15
1 4 7	2 6 11	3 9 14	5 7 9	7 11 14
1 8 11	2 7 12	3 12 15	5 10 15	8 9 10
1 9 12	2 10 14	4 5 12	5 13 14	8 12 13
1 10 13	2 13 15	4 6 13	6 7 10	9 11 13
1 14 15	3 4 10	4 8 14	6 9 15	10 11 12

Nous construirons les plans de la géométrie en prenant les couples de droites passant par un point i . Nous ne conserverons de ces plans que ceux qui ne passent pas par la droite 1, 2 et nous enlèverons les points de $\square$, soient : 5, 6, 8, 11, 1, 2, 3

4 7 9 12
10 13 14 15
4 7 10 13
9 12 14 15
4 7 14 15
4 9 13 15
4 10 12 15
7 13 9 14
4 12 13 14
7 9 10 15
7 12 10 14

Tableau d'association.

- Le point premier associé du point p est le point $p + p_1$, c'est-à-dire $p + 1 0 0 0$.

$$\begin{aligned}
 p_4 &= 0 \ 0 \ 0 \ 1 \text{ a pour premier associé } 1 \ 0 \ 0 \ 1 = p_7 \\
 p_9 &= 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ - \ - \ - \ - \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 = p_{12} \\
 p_{10} &= 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ - \ - \ - \ - \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 = p_{13} \\
 p_{14} &= 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ - \ - \ - \ - \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 = p_{15}
 \end{aligned}$$

- Les trois points deuxièmes associés de p sont :

$$q = p + p_2, \quad t = p + p_3, \quad p + q + t$$

pour p_4 ce sont $0 \ 1 \ 0 \ 1 = p_9$, $0 \ 0 \ 1 \ 1 = p_{10}$, $0 \ 1 \ 1 \ 1 = p_{14}$

pour p_7 ce sont $1 \ 1 \ 0 \ 1 = p_{12}$, $1 \ 0 \ 1 \ 1 = p_{13}$, $1 \ 1 \ 1 \ 1 = p_{15}$

Nous pouvons résumer ces résultats en un tableau rectangulaire où chaque variété i sera :

- première associée de la variété située sur la même rangée que i ;

- deuxième associée des trois variétés situées sur la même colonne que i ;

- troisième associée des variétés non situées sur la même rangée ou la même colonne que i .

4	7
9	12
10	13
14	15

Remarque.

De façon générale le nombre des variétés étant a^3 , chaque variété i ayant $a - 1$ premières associées et $a^2 - 1$ deuxièmes associées, le tableau d'association des variétés se présentera sous forme d'un rectangle ayant a variétés dans une rangée et a^2 variétés dans une colonne. Les variétés d'une même rangée sont premières associées celles d'une même colonne deuxièmes associées.

II - CONSTRUCTION A L'AIDE DE TREILLIS CIRCULAIRES -

A - CONSTRUCTION DES TREILLIS -

Dans un espace vectoriel à s dimensions sur les corps des nombres réels R_s choisissons un sous-espace de dimension $s - 2$ ρ_{s-2}

et n sous-espaces de dimension $s-1$ ayant en commun ρ_{s-2}

$$R_{s-1}^i \subset R_s \quad \text{et} \quad \bigcap_i R_{s-1}^i = \rho_{s-2}$$

Continuons la construction de cette chaîne :

- dans ρ_{s-2} faisons choix d'un sous-espace ρ_{s-3} ,

$$\rho_{s-3} \subset \rho_{s-2} \subset R_s$$

- dans chaque R_{s-1} faisons choix de n espaces de dimension $s-2$ contenant ρ_{s-3}

$$R_{s-2} \subset R_{s-1} \subset R_s$$

$$\bigcap_i R_{s-2} = \rho_{s-3}$$

Finalement choisissons une droite ρ_1 ,

$$\rho_1 \subset \rho_2 \subset \dots \subset \rho_{s-2} \subset R_s$$

et dans chaque R_3 obtenu par le processus précédent, choisissons n plans R_2 passant par la droite ρ_1

$$R_2 \subset R_3 \subset \dots \subset R_s$$

$$\bigcap_i R_2 = \rho_1$$

Dans chaque plan R_2 construisons un treillis circulaire d'ordre n , c'est-à-dire n cercles concentriques et n diamètres.

Le treillis ainsi formé est composé de 2^{n^2} points, chaque cercle et chaque diamètre, renfermant $2n$ points.

Si nous considérons les cercles et les diamètres comme des blocs, les points comme des variétés, nous obtenons un plan d'expérience avec les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 2n^2 \quad . \quad n^{s-2} = 2n^s \\ b = 2n \quad . \quad n^{s-2} = 2n^{s-1} \\ k = 2n \\ r = 2 \end{array} \right.$$

Montrons maintenant qu'il s'agit là d'un bloc incomplet partiellement équilibré à $s+1$ classes associées.

B - DEFINITION DES CLASSES D'ASSOCIATION -

Choisissons une variété v les autres se répartissent en $s + 1$ groupes :

1/ les variétés apparaissent avec v à la fois sur le même diamètre et sur le même cercle ; il y en a $n_1 = 1$.

2/ les variétés apparaissant soit sur le même cercle soit sur le même diamètre que v , et n'appartenant pas à la première catégorie ; il y en a $n_2 = 4(n - 1)$.

3/ les variétés appartenant au même plan que v (sans appartenir aux autres classes)

$$n_3 = 2n^2 - 4n + 2$$

$$n_3 = 2(n - 1)^2$$

4/ les variétés apparaissant dans le même R_3 que v

$$n_4 = 2n^3 - 2n^2$$

$$n_4 = 2n^2(n - 1)$$

.....

$S + 1$) les variétés de R_s , n'appartenant pas au même R_{s-1} que v

$$n_{s+1} = 2n^2 \cdot n^{s-2} - 2n^2 \cdot n^{s-3},$$

$$n_{s+1} = 2n^{s-1}(n - 1).$$

Conformément aux notations de R. C. Bose, appelons λ_i le nombre de blocs dans lesquels deux variétés $i^{\text{èmes}}$ associées apparaissent ensemble,

$n_1 = 1$	$n_2 = 4(n - 1)$	$n_3 = 2(n - 1)^2$	$n_i = 2n^{i-2}(n - 1)$
$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 1$	$\lambda_3 = 0$	$\lambda_i = 0$
			$(i = 4, \dots, s + 1)$

Ces paramètres vérifient le premier système de relations

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sum_{i=1}^{s+1} n_i + 1 = 2n \\ r(k - 1) = \sum_{i=2}^{s+1} n_i \lambda_i = 2(2n - 1) \end{array} \right.$$

La loi d'association est telle que les paramètres de seconde espèce p_{ij}^u sont bien indépendants du couple initial choisi. Les matrices des paramètres de seconde espèce s'écrivent :

$$p_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4(n-1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2(n-1)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_u & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n_{s+1} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2(n-2) & 2(n-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2(n-1) & 2(n-1)(n-2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_u & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n_{s+1} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 4(n-2) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4(n-2) & 2(n-2)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_u & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n_{s+1} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n_{u-1} & 0 & \dots & 0 \\ (u=4, \dots, s+1) & 1 & n_2 & \dots & n_{u-1} & n_u - 1 - \sum_{l=1}^{u-1} n_l & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n_{u+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & n_{s+1} \end{bmatrix}$$

Valeurs qui vérifient le second système de conditions :

$$\begin{cases} \sum_{u=1}^{s+1} p_{ju}^i = \begin{cases} n_i - 1 & \text{si } i = j \\ n_i & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ n_i p_{ju}^i = n_u p_{ij}^u = n_j p_{ui}^j \end{cases}$$

Nous avons ainsi construit un bloc incomplet partiellement équilibré à $s+1$ classes associées.

C - CAS PARTICULIERS -

Nous allons donner les paramètres de plans d'expérience qui peuvent être d'un usage courant.

$s = 2$

C. Radhakrihna Rao en a donné des exemples dans la revue Sankya.

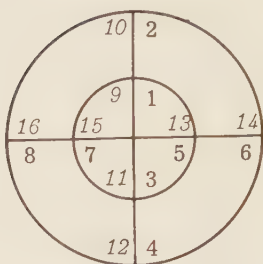
	n	v	b	k	p_{12}^1	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
$s = 3$	2	16	8	4	2	1	4	2	8		
	3	54	18	6	2	1	8	8	36		
	4	128	32	8	2	1	12	18	96		
$s = 4$	2	32	16	4	2	1	4	2	8	16	
	3	162	54	6	2	1	8	8	36	108	
$s = 5$	2	64	32	4	2	1	4	2	8	16	32
$s = 6$	2	128	64	4	2	1	4	2	8	16	32

Exemples de construction.

Dans chaque treillis les variétés sont numérotées sur les diamètres à partir du cercle intérieur et en tournant dans le sens de rotation positif.

1/ - $s = 3, n = 2$.

Nous écrirons, sur le schéma, les numéros des variétés du premier plan droits, les numéros des variétés du second plan seront en italique.

DiamètresCercles

$\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3, 4) \\ (5, 6, 7, 8) \end{array} \right\}$ premier plan $\left\{ \begin{array}{l} (1, 3, 5, 7) \\ (2, 4, 6, 8) \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} (9, 10, 11, 12) \\ (13, 14, 15, 16) \end{array} \right\}$ second plan $\left\{ \begin{array}{l} (9, 11, 13, 15) \\ (10, 12, 14, 16) \end{array} \right.$

Les couples premiers associés sont :

(1, 3) (2, 4) (5, 7) (6, 8) (9, 11) (10, 12) (13, 15) (14, 16).

Les variétés secondes associées de la variété 1 sont :

2, 4, 5, 7,

Les variétés troisièmes associées de la variété 1 sont :

6, 8,

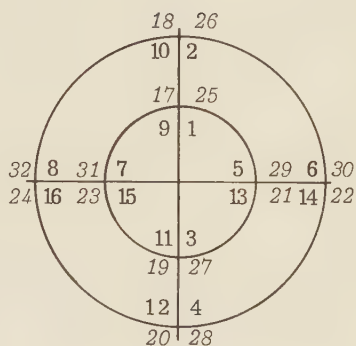
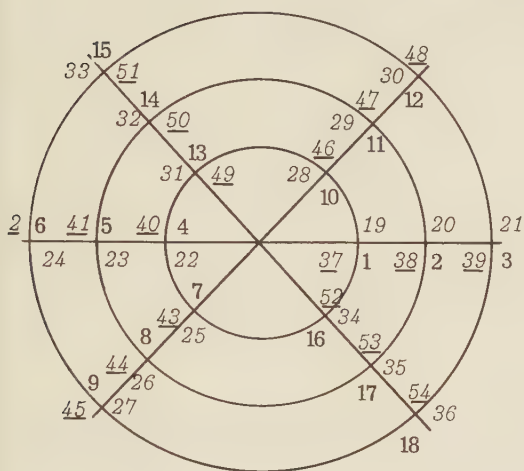
La simple lecture du treillis fournit les variétés associées.

2/ - s = 3, n = 3.

$\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ (7, 8, 9, 10, 11, 12) \\ (13, 14, 15, 16, 17, 18) \end{array} \right\}$ premier plan $\left\{ \begin{array}{l} (1, 4, 7, 10, 13, 16) \\ (2, 5, 8, 11, 14, 17) \\ (3, 6, 9, 12, 15, 18) \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} (19, 20, 21, 22, 23, 24) \\ (25, 26, 27, 28, 29, 30) \\ (31, 32, 33, 34, 35, 36) \end{array} \right\}$ second plan $\left\{ \begin{array}{l} (19, 22, 25, 28, 31, 34) \\ (20, 23, 26, 29, 32, 35) \\ (21, 24, 27, 30, 33, 36) \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} (37, 38, 39, 40, 41, 42) \\ (43, 44, 45, 46, 47, 48) \\ (49, 50, 51, 52, 53, 54) \end{array} \right\}$ troisième plan $\left\{ \begin{array}{l} (37, 40, 43, 46, 49, 52) \\ (38, 41, 44, 47, 50, 53) \\ (39, 42, 45, 48, 51, 54) \end{array} \right.$



3/ - $s = 4, n = 2$.

	<u>Diamètres</u>		<u>Cercles</u>
1er R_3	$\left\{ \begin{array}{l} (1, 2, 3, 4) \\ (5, 6, 7, 8) \end{array} \right\}$	premier plan	$\left\{ \begin{array}{l} (1, 3, 5, 7) \\ (2, 4, 6, 8) \end{array} \right\}$
	$\left\{ \begin{array}{l} (9, 10, 11, 12) \\ (13, 14, 15, 16) \end{array} \right\}$	deuxième plan	$\left\{ \begin{array}{l} (9, 11, 13, 15) \\ (10, 12, 14, 16) \end{array} \right\}$
2ème R_3	$\left\{ \begin{array}{l} (17, 18, 19, 20) \\ (21, 22, 23, 24) \end{array} \right\}$	premier plan	$\left\{ \begin{array}{l} (17, 19, 21, 23) \\ (18, 20, 22, 24) \end{array} \right\}$
	$\left\{ \begin{array}{l} (25, 26, 27, 28) \\ (29, 30, 31, 32) \end{array} \right\}$	deuxième plan	$\left\{ \begin{array}{l} (25, 27, 29, 31) \\ (26, 28, 30, 32) \end{array} \right\}$

4/ - Construction générale : $s = 2n$.

Diamètres :

$$(2ni + 1, \dots, 2n(i+1))$$

1er plan

$i = 0, \dots, n-1$.

1er R_3

avec :

premier R_u nème plan : $i = n(n-1), \dots, n^2 - 1$

.....

1er plan : $i = (n-1)n^2, \dots, (n-1)(n^2+1)$

nème R

nème plan : $i = \dots, n^3 - 1$.

Cercles :

$$(j, n + j, \dots, (2n - 1)n + j)$$

dans le premier plan : $j = 1, \dots, n$ dans le t^è plan : $j = 2(t-1)n^2 + 1, \dots, 2(t-1)n^2 + n$

II - CONSTRUCTIONS DE PLANS D'EXPERIENCE QUASIFACTO-RIELS DE DIMENSION n -

Un bloc incomplet partiellement équilibré est dit quasifactoriel de dimension n, lorsque le nombre de variétés v est de la forme

$$v = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ étant des nombres quelconques. Les plans d'expérience quasifactoriels de dimension deux, ont été étudiés par Radhakrishna Rao. Nous allons faire ici une étude générale qui permettra d'augmenter le nombre de classes d'association.

A - DEFINITION DES CLASSES D'ASSOCIATION -

Dans un espace vectoriel à n dimensions ayant pour base l'ensemble des vecteurs linéairement indépendant

$$e_1, e_2, \dots, e_n,$$

les v variétés peuvent être rangées en réseau formant un hyperparallélépipède aux côtés parallèles aux vecteurs e_i : il y a p_i variétés sur chaque parallèle au vecteur e_i .

1/ Deux variétés seront i^e associées, ($i = 1, \dots, n$) si elles se trouvent sur la même parallèle au vecteur e_i , d'où

$$n_i = p_i - 1$$

2/ Deux variétés seront j^e associées, si l'espace à 2 dimensions construit parallèlement aux vecteurs e_i et e_k ($i, k = 1, \dots, n$), i k passant par l'une, contient l'autre, (sans qu'elles soient i ou k associées)

$$n_j = (p_i - 1)(p_k - 1)$$

Il y a C_n^2 classes d'association de cette catégorie.

3/ Deux variétés seront u^e associées si l'espace à 3 dimensions

construit parallèlement aux vecteurs e_i, e_j, e_k , contenant l'une contient l'autre (sans qu'elles appartiennent aux deux premières catégories),

$$n_u = (p_i - 1) (p_j - 1) (p_k - 1)$$

$$i, j, k = 1, \dots, n$$

$$i \subset j \subset k$$

Il y a C_n^3 classes d'association de cette catégorie.

.....

Les classes d'association construites sont bien disjointes puisque nous avons considéré chaque ensemble de variétés comme ouvert. Il y a en tout

$$N = C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

$$N = 2^n - 1$$

classes d'association.

B - BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRES A N CLASSES ASSOCIEES -

Supposons qu'il existe n blocs incomplets Equilibrés ayant pour paramètres :

$$v = p_i, \quad r = r_i, \quad k, \quad \lambda = \lambda_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

(ils ont le même nombre de parcelles).

Considérons le réseau des variétés comme forme d'ensembles de p_i variétés disposées parallèlement au vecteur e_i , et construisons pour chaque ensemble un bloc incomplet équilibré de paramètres $p_i, b_i, r_i, \lambda_i, k$.

En juxtaposant les n groupes de $\prod_{j=1}^n p_j$ ($j \neq i$) blocs incomplets équilibrés ainsi construits, nous obtenons un plan d'expérience dont les paramètres sont :

$$\begin{aligned}
 v &= \prod_{i=1}^n p_i \\
 b &= \sum_{i=1}^n (b_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j) \\
 r &= \sum_{i=1}^n r_i \\
 k & \\
 n_i &= p_i - 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\
 n_u &= (p_i - 1) (p_j - 1) \dots (p_k - 1) \\
 \lambda_i &= \lambda_i \quad (i = 1, \dots, n) \\
 \lambda_u &= 0 \quad (u = n + 1, \dots, N) \text{ avec } N = 2^n - 1
 \end{aligned}$$

Ce plan d'expérience est un bloc incomplet partiellement équilibré à N classes associées, en effet :

$$\begin{aligned}
 k \sum_{i=1}^n (b_i \prod_{j \neq i} p_j) &= (\sum_{i=1}^n r_i) \prod_{i=1}^n p_i & \text{car } kb_i &= r_i p_i \\
 \text{et :} & & & \\
 \sum_{s=1}^N n_s \lambda_s &= (k-1) \sum_{i=1}^n r_i, & \text{car } \lambda_i (p_i - 1) &= r_i (k-1)
 \end{aligned}$$

Lorsque les p_i sont distincts, les seules valeurs pratiquement intéressantes de n sont 2 et 3.

Remarquons cependant, que chaque fois que deux ou plusieurs p_i sont égaux il y a réduction du nombre N de classes d'association : n peut alors prendre des valeurs supérieures à 3.

C - CAS PARTICULIERS -

1/ Nous pouvons toujours prendre comme plan d'expérience équilibré le plan de paramètres :

$$v = p, \quad b = 1, \quad r = 1, \quad \lambda = 1, \quad k = p$$

Paramètres du plan équilibré					Paramètres du plan quasifactoriel obtenu.			
k=p	v=q	b ₁	r ₁	λ ₁	v=p ⁿ q	b=q+b ₁ p ⁿ	r=n+r ₁	k=p
3	4	4	3	2	3 ⁿ .4	4(1+3 ⁿ)	3+n	3
3	6	10	5	2	3 ⁿ⁺¹ .2	6+10.3 ⁿ	5+n	3
3	7	7	3	1	7.3 ⁿ	7(1+3 ⁿ)	3+n	3
3	9	12	4	1	3 ⁿ⁺²	9(1+4.3 ⁿ)	4+n	3
4	4	2	2	2	4 ⁿ⁺¹	4(1+4 ⁿ⁻¹)	2+n	4
4	7	7	4	2	4 ⁿ .7	7(1+4 ⁿ)	4+n	4
4	8	14	7	3	2 ²ⁿ⁺³	8(14.4 ⁿ)	7+n	4
4	4	4	3	3	4 ⁿ⁺¹	4(1+4 ⁿ)	3+n	4
4	5	5	4	3	5.4 ⁿ	5(1+4 ⁿ)	4+n	4
5	5	3	3	3	5 ⁿ⁺¹	5+3.5 ⁿ	3+n	5

En le juxtaposant, suivant la méthode exposée au plan d'expérience équilibré :

$$v = q, \quad b = b_1, \quad r = r_1, \quad \lambda = \lambda_1, \quad k = p$$

Nous obtenons un bloc incomplet partiellement équilibré à $2n+1$ classes d'association :

$$v = p^n q, \quad b = b_1 p^n + q, \quad k = p, \quad r_1 = n + r, \quad \lambda_1 = \lambda_1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda = 0$$

Nous pouvons calculer ainsi le nombre de classes d'association :

- pour la première catégorie n classes se confondent, il n'en reste que deux distinctes ;
- il en est de même pour les $n-1$ autres catégories ;
- la dernière ne comporte qu'une classe.

Nous allons dresser la liste des principaux plans d'expérience qui peuvent être ainsi construits.

2/- Cas : $n = 3, v = p_1.p_2.p_3$

En rangeant les variétés dans un parallélépipède, nous obtenons un plan quasifactoriel à $N = 2^3 - 1 = 7$ classes associées.

Lorsque deux des trois plans utilisés équilibrés sont identiques il se produit la même réduction de classes d'association que dans le cas précédent,

$$N = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Nous donnons la liste de ces principaux plans d'expérience :

$$v = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \quad b = b_1 p_2 p_3 + b_2 p_3 p_1 + b_3 p_1 p_2, \quad r = r_1 + r_2 + r_3, \quad k, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_i = 0 \\ (i = 4, \dots, 7)$$

Paramètres des plans équilibrés													Paramètres du plan quasifactoriel			
k	p ₁	b ₁	r ₁	λ ₁	p ₂	b ₂	r ₂	λ ₂	p ₃	b ₃	r ₃	λ ₃	v	b	r	k
3	4	4	3	2	4	4	3	2	3	1	1	1	64	112	7	3
3	4	4	3	2	6	10	5	2	3	1	1	1	72	168	9	3
4	4	4	2	2	4	4	2	2	4	1	1	1	64	144	5	4
4	4	4	2	2	5	5	4	3	4	1	1	1	80	180	7	4
4	4	4	2	2	4	4	3	3	4	1	1	1	64	144	6	4
4	4	4	3	3	4	4	3	3	4	1	1	1	64	144	7	4
4	4	4	3	3	5	5	4	3	4	1	1	1	80	180	8	4
4	5	5	4	3	5	5	4	3	4	1	1	1	100	225	9	4

3/ - Calcul de la réduction du nombre de classes d'association lorsque plusieurs classes se confondent en une seule.

Supposons que le nombre v puisse se mettre sous la forme

$$v = p^s \cdot q_1 \dots q_u \quad \text{avec} \quad s + u = n$$

Dans la première catégorie il y a $1 + C_u^1$ classes.

Supposons $s > u$, dans la seconde il y en a :

$$1 + C_u^1 + C_u^2$$

dans la troisième $1 + C_u^1 + C_u^2 + C_u^3$

.....

dans la u^e $1 + C_u^1 + \dots + C_u^u$

dans les $s - u$ suivantes $1 + C_u^1 + \dots + C_u^u$

dans la $s + 1^e$ $C_u^1 + \dots + C_u^u$

dans la $s + 2^e$ $C_u^2 + \dots + C_u^u$

.....

dans la $s + u^e = n^e$ C_u^u

Finalement il y a $s + (s+1) (C_u^1 + \dots + C_u^u)$

$$N = s + (s+1) (2^u - 1)$$

Supposons maintenant $s < u$

dans la première catégorie : $1 + C_u^1$

.....

dans la s^e catégorie : $1 + C_u^1 + \dots + C_u^s$

dans la $s + 1^e$ $C_u^1 + \dots + C_u^s + C_u^{s+1}$

.....

dans la u^e $C_u^{u-s} + \dots + C_u^u$

.....

dans la n^e C_u^u

En tout, comme dans le cas $s > u$

$N = s + (s+1) (2^u - 1)$

CHAPITRE II

CONDITIONS D'EXISTENCE DE BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT ÉQUILIBRÉS A DEUX CLASSES ASSOCIÉES

Dans ce chapitre, nous allons étudier le cas particulier, très utilisé dans la pratique, où le plan d'expérience ne comporte que deux classes associées.

Nous allons tout d'abord rappeler les résultats obtenus par Connor et Clatworthy sur la matrice d'incidence d'un bloc incomplet partiellement équilibré à deux classes associées.

Dans le deuxième paragraphe, nous déduirons un groupe de conditions nécessaires et suffisantes d'existence de tels plans d'expérience dans le cas où $b < v$. (Ce cas est très intéressant pratiquement comme nous l'avons expliqué dans l'introduction).

Nous donnerons finalement une méthode pratique pour dresser la liste de tous les blocs incomplets équilibrés existant dans ce cas.

Dans le troisième paragraphe, enfin, nous résoudrons le système d'équations diophantiennes permettant de calculer les paramètres de première et de seconde espèce de tous les blocs incomplets partiellement équilibrés comportant 4 répétitions. Lorsque le plan d'expérience obtenu a déjà été construit, nous donnerons pour référence le numéro du plan dans la Table donnée par Bose R C, Clatworthy et Shrikhande. Nous insisterons sur les plans d'expérience encore non construits, et sur les cas d'impossibilité. Ce travail a été fait pour deux répétitions par Roy et Laha.

A - ETUDE DE LA MATRICE D'INCIDENCE D'UN BLOC INCOMPLET PARTIELLEMENT EQUILIBRE -

1/ - Cas général.

La matrice d'incidence d'un plan d'expériences est :

$$N = (n_{ij})$$

avec $n_{ij} = 1$ ou 0 suivant que la i ème variété ($i = 1, \dots, v$) apparaît ou non dans le j ème bloc ($j = 1, \dots, b$).

Dans le cas d'un bloc partiellement équilibré, chaque variété est répétée r fois, donc $\sum_{j=1}^b \lambda n_{ij} = r$ ($i = 1, \dots, v$) et chaque variété apparaît dans λ_s blocs avec ses sèmes associées,

$$\sum_{u=1}^b n_{iu} n_{ju} = \lambda_s \quad (i \neq j, i, j = 1, \dots, v)$$

Appelons N' la matrice associée de N

$$NN' = \begin{pmatrix} r & & & \lambda_s \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \lambda_s & & & r \end{pmatrix}$$

et M la matrice obtenue en remplaçant dans NN' r par la variable z : M est un polynome de degré v en z .

Cherchons les racines de ce polynome.

Remplaçons la première ligne par la somme de toutes les lignes.

Chaque élément de la première ligne est alors égal à $z + \sum_{s=1}^m n_s \lambda_s$.

Un facteur du polynome $|M|$ est donc $z - z_0$ avec $z_0 = - \sum_{s=1}^m n_s \lambda_s = -r(k-1)$.

Si X est le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}$ une condition nécessaire et suffisante pour que

$|M| = 0$ est que $M \cdot X = 0$ ait d'autres solutions que la solution toute nulle. Cherchons les solutions non nulles et linéairement indépendantes de $M \cdot X = 0$; à chacune correspondra un zéro de $|M|$. Soit $S_s(x_i)$ la somme des variables correspondant aux sèmes associées de la i ème variété. Les v équations $M \cdot X = 0$ s'écrivent :

$$zx_i + \sum_{s=1}^n \lambda_s S_s(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v).$$

Faisons la somme de ces équations par rapport à s :

$$\begin{aligned} & [\lambda_1 p_{s1}^1 + \lambda_2 p_{s2}^1 + \dots + \lambda_m p_{sm}^1 - n_s \lambda_s] S_1(x_i) \\ & + \dots \\ & + [z + \lambda_1 p_{s1}^s + \lambda_2 p_{s2}^s + \dots + \lambda_m p_{sm}^s - n_s \lambda_s] S_s(x_i) \\ & + \dots \\ & + [\lambda_1 p_{s1}^m + \lambda_2 p_{s2}^m + \dots + \lambda_m p_{sm}^m - n_s \lambda_s] S_m(x_i) = 0 \end{aligned} \quad (i)$$

Posant le coefficient de $S_j(x_i)$ égal à a_{sj} , le système d'équations (i) s'écrit :

$$(2) \quad a_{s1}S_1(x_i) + \dots + a_{sm}S_m(x_i) = 0 \quad (s = 1, \dots, m).$$

Or la somme des v équations $M.X = 0$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^v x_i = 0 \quad \text{ou encore} \quad x_i + \sum_{s=1}^m S_s(x_i) = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer $x_i \neq 0$, donc les $S_s(x_i)$ non tous nuls, ce qui est vrai si et seulement si :

$$|A| = |a_{su}| = 0 \quad (s, u = 1, 2, \dots, m)$$

THEOREME -

$$M = (z - z_0) (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_t)^{\alpha_t}$$

avec $z_0 = -r(k-1)$; $z_1, \dots, z_t$ ($t < m$) zéros distincts de $|A|$ et

$$\sum_{n=1}^t \alpha_n = v-1.$$

2/ - Cas du bloc incomplet partiellement équilibré a deux classes associées.

$|A|$ s'écrit :

$$|A| = \begin{vmatrix} z + \lambda_1 p_{11}^1 + \lambda_2 p_{12}^1 - \lambda_1 n_1 & \lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2 - \lambda_1 n_1 \\ \lambda_1 p_{21}^1 + \lambda_2 p_{22}^1 - \lambda_2 n_2 & z + \lambda_1 p_{21}^2 + \lambda_2 p_{22}^2 - \lambda_2 n_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$|A| = z^2 + [(\lambda_1 - \lambda_2)(p_{12}^2 - p_{12}^1) - (\lambda_1 + \lambda_2)]z + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 p_{12}^1 - \lambda_1 p_{12}^2) + \lambda_1 \lambda_2$$

Posons :

$$\gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1$$

$$\beta = p_{12}^2 + p_{12}^1$$

$$\Delta = \gamma^2 + 2\beta + 1$$

Les racines de l'équation $|A| = 0$ sont :

$$z_1 = 1/2 \{ (\lambda_1 - \lambda_2) [-\gamma + (-1)^i \sqrt{\Delta}] + \lambda_1 + \lambda_2 \}$$

Δ est positif, donc $z_1 \neq z_2$ et si $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $z_1 < z_2$.

Dans le cas où $b < v$, alors $z_2 = r$.

Déterminons les exposants α_i . $|M| = (z-z_0) (z-z_1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2}$ avec :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = v - 1.$$

$|M|$ peut s'écrire :

$$|M| = z^v - (z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) z^{v-1} + \dots + (-z_0) (-z_1)^{\alpha_1} (-z_2)^{\alpha_2}.$$

Le coefficient de z^{v-1} étant nul, d'après le calcul du déterminant $|M|$: $z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0$; $\alpha_1 + \alpha_2 = v-1$ d'où

$$\alpha_i = \frac{(v-1) [(-1)^i \gamma + \sqrt{\Delta} + 1] - 2n_i}{2\sqrt{\Delta}}$$

Il est nécessaire que l'un des nombres α_i soit un entier positif inférieur à $v-1$; l'autre l'est alors également.

Remarquons que, dans le cas $b < v$, la relation $z_2 = r$ peut s'écrire :

$$(\lambda_1 - \lambda_2) [(r - \lambda_2) p_{12}^{-1} - (r - \lambda_1) p_{12}^{-2}] = (r - \lambda_1) (r - \lambda_2). \text{ Avec } b > v - \alpha_2 = \alpha_1 + 1$$

Dans le cas général $z_1 < r$ s'écrit :

$$(A) \quad (\lambda_1 - \lambda_2) [(r - \lambda_2) p_{12}^{-1} (r - \lambda_1) p_{12}^{-2}] < (r - \lambda_1) (r - \lambda_2)$$

résultat dû à Nair (1943).

Remarque.

Le théorème dû à Connor et Clatworthy, est une généralisation du théorème dû à Schutzenberger.

B - CONDITIONS D'EXISTENCE D'UN BLOC INCOMPLET PARTIELLEMENT EQUILIBRE A DEUX CLASSES ASSOCIEES DANS LE CAS OU $b < v$ -

Nous allons chercher tous les plans d'expérience de cette catégorie lorsque le nombre r des répétitions est fixé.

Comme les λ_i sont des nombres entiers inférieurs ou égaux à r , ces paramètres ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Nous allons déterminer les paramètres de première et de deuxième espèce autres que λ_i et r . Remarquons qu'il suffit de connaître $t = p_{11}^1$ pour connaître les autres paramètres de seconde espèce, étant donné le système de relations :

$$\begin{aligned}n_1 p_{12}^1 &= n_2 p_{11}^2 \\n_1 p_{22}^1 &= n_1 p_{12}^2 \\p_{11}^1 + p_{12}^1 + 1 &= p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1 \\p_{12}^1 + p_{22}^1 &= p_{12}^2 + p_{22}^2 + 1 = n_2\end{aligned}$$

Soient λ_1 et λ_2 , $\lambda_1 > \lambda_2$, deux entiers positifs inférieurs à r . Les coefficients de première espèce vérifient le système de relations :

$$vr = bk$$

$$v = n_1 + n_2 + 1$$

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = r(k-1)$$

1/ - Cas où λ_1 et λ_2 sont premiers entre eux.

D'après l'identité de Bezout, il existe deux nombres a_1 et a_2 entiers, inférieurs en valeur absolue respectivement à λ_2 et λ_1 , tels que $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = 1$.

Posons $u = k - 1$;

$$\text{de } a_1 \lambda_1 ru + a_2 \lambda_2 ru = ru$$

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = ru$$

nous tirons : $(n_1 - a_1 ru) \lambda_1 + (n_2 - a_2 ru) \lambda_2 = 0$ et, λ_1 et λ_2 étant premiers entre eux :

$\begin{aligned}n_1 &= a_1 ru - \lambda_2 \rho \\n_2 &= a_2 ru + \lambda_1 \rho\end{aligned}$

ou ρ désigne un paramètre à valeurs entières.

a) Recherche de valeurs de b susceptibles de fournir un plan d'expérience.

n_1 et n_2 sont des entiers positifs, ce qui fournit la limitation pour ρ :

$$- \frac{a_2 ru}{\lambda_1} - \rho - \frac{a_1 ru}{\lambda_2}$$

Le nombre de blocs b est donné par $vr = bk$, c'est-à-dire :

$$b = \frac{(n_1 + n_2 + 1)r}{u + 1} = \frac{(a_1 + a_2)ru + (\lambda_1 - \lambda_2) + 1}{u + 1}$$

La limitation imposée à ρ fournit une limitation pour b et les valeurs de b susceptibles de fournir un bloc incomplet partiellement équilibré sont alors connues, b devant être pris entre deux entiers positifs.

b) Existence de plan d'expérience de paramètre donnés r , b , λ_1 , λ_2 .

Soit b une valeur convenable. D'après le paragraphe précédent, pour qu'il existe un bloc incomplet partiellement équilibré de paramètres r , b , λ_1 , λ_2 , ($b < v$), il faut et il suffit que :

(A) $(r - \lambda_1)(r - \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)[(r - \lambda_2)p_{12}^1 - (r - \lambda_1)p_{12}^2]$ étant vérifiée avec $p_{12}^1 = t$ entier positif ou nul,

$$\alpha_1 = \frac{(v-1)[-\gamma + \sqrt{\Delta + 1}] - 2n_1}{2\sqrt{\Delta}}$$

soit entier positif. De $p_{12}^1 = t$, $p_{12}^2 = n_1 - \frac{n_1 t}{n_2}$, nous tirons :

$$(r - \lambda_1)(r - \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)[(r - \lambda_2)t - (r - \lambda_1)(n_1 - n_1/n_2 t)]$$

$$\text{soit } t/n_2 = \frac{(r - \lambda_1)[(r - \lambda_2) + n_1(\lambda_1 - \lambda_2)]}{(\lambda_1 - \lambda_2)[(r - \lambda_2)n_2 + (r - \lambda_1)n_1]}$$

Désignons par N et D respectivement le numérateur et le dénominateur de la fraction du second membre. Compte tenu de $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 1$, nous obtenons :

$$N = (r - \lambda_1)[r(1 + a_1 u(\lambda_1 - \lambda_2)) - \rho \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_2]$$

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2)[r^2 u(a_1 + a_2) + \rho r(\lambda_1 - \lambda_2) - ru]$$

Or, $bk = vr$ nous donne :

$$b(u+1) = r[ru(a_1 + a_2) + \rho(\lambda_1 - \lambda_2) + 1]$$

d'où :

$$\rho r(\lambda_1 - \lambda_2) = b(u+1) - r^2 u(a_1 + a_2) - r$$

Par suite, $N = (r - \lambda_1) [r(1 + a_1 u (\lambda_1 - \lambda_2)) - \lambda_2 / r \cdot (b(u+1) - r^2 u (a_1 + a_2))]]$

$$Nr = (r - \lambda_1) (r^2 - \lambda_2 b) (u + 1)$$

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2) (b - r) (u + 1)$$

Finalement :

$$t/n_2 = \frac{(r - \lambda_1) (r^2 - \lambda_2 b)}{r (\lambda_1 - \lambda_2) (b - r)}$$

expression indépendante de n donc de k .

Remarquons que r est toujours inférieur à b , donc que $b - r$ est différent de 0.

$$\text{Calcul de } = \frac{(v-1) (\sqrt{\Delta} - \gamma + 1) - 2n_1}{2\sqrt{\Delta}}$$

Dans le cas envisagé ($b < v$) $2z_2 = 2r = \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) (\sqrt{\Delta} - \gamma)$

$$\text{donc } \Delta - \gamma = \frac{2r - (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\alpha = \frac{[ru(a_1 + a_2) + \rho(\lambda_1 - \lambda_2)] \cdot (r - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) - (a_1 ru - \lambda_2 \rho)}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\begin{aligned} \alpha (\lambda_1 - \lambda_2) &= ru [r(a_1 + a_2) - 1] + b(u+1) - r^2 u (a_1 + a_2) - r \\ &= (b - r) (u + 1) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\Delta} = \gamma + \frac{2r - (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

avec $\gamma = n_1 - n_1/n_2 \cdot t - t = a_1 ru - \lambda_2 \rho - t/n_2 [ru(a_1 + a_2) + \rho(\lambda_1 - \lambda_2)]$

$$\begin{aligned} \gamma &= a_1 ru - \lambda_2 \frac{b(u+1) - r^2 u (a_1 + a_2) - r}{r(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{(r - \lambda_1) (r^2 - \lambda_1 b) [b(u+1) - r]}{r^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (b - r)} \\ &= \frac{r [r^3 - r^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 b] + ur^3 (b - r) - b(u+1) [r^3 - r^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 b]}{r^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (b - r)} \end{aligned}$$

donc :

$$\sqrt{\Delta} = \frac{u [-r^4 + br^2 (\lambda_1 + \lambda_2) - b^2 \lambda_1 \lambda_2] + (b - r) (r^3 - \lambda_1 \lambda_2 b)}{r^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (b - r)}$$

et, enfin :

$$\alpha = \frac{r^2(b-r)^2(u+1)}{u[-r^4 + br^2(\lambda_1 + \lambda_2) - b^2\lambda_1\lambda_2] + (b-r)(r^3 - \lambda_1\lambda_2b)}$$

et, en tenant compte de $u = k - 1$,

$$\alpha = \frac{r^2(b-r)^2 k}{rb(r-\lambda_1)(r-\lambda_2) - k(r^2-\lambda_1b)(r^2-\lambda_2b)}$$

expression indépendante de a_1 et a_2 .

2/ - Cas général : λ_1 et λ_2 quelconques.

Soit d leur plus grand commun diviseur $\lambda_1 = \mu_1 d$; $\lambda_2 = \mu_2 d$. D'après l'identité de Bezout, il existe a'_1 et a'_2 entiers inférieurs en valeur absolue respectivement à μ_2 et μ_1 tels que $\mu_1 a'_1 + \mu_2 a'_2 = 1$; de plus, $d(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) = ru$, donc d divise ru .

Nous devons donc distinguer trois cas :

- a) $dr' = r$;
- b) $u = du'$;
- c) $d = pq$ avec $r = pr'$, $u = qu'$.

$$\text{Nous pouvons écrire } \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 = \begin{vmatrix} ur' \\ ru' \\ r'u' \end{vmatrix}$$

μ_1 et μ_2 étant premiers entre eux, nous posons dans tous les cas :

$$n_1 = a'_1 r'u' - \mu_2 \rho'$$

$$n_2 = a'_2 r'u' + \mu_1 \rho'$$

où ρ' est un paramètre à valeurs entières. Si $\rho = \rho'/d$, en posant $a'_1 = da_1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} n_1 &= a_1 ru - \lambda_2 \rho \\ n_2 &= a_2 ru + \lambda_1 \rho \end{aligned}$$

où ρ n'est plus un paramètre entier, mais un entier divisé par d . Nous obtenons donc les mêmes expressions pour t/n_2 et que dans le cas précédent.

3/ - Conclusion.

Le résultat remarquable est que α est toujours une fonction homographique de k , et non comme nous pouvions le penser le quotient de deux trinômes du second degré en k . Les points à coordonnées entières de l'hyperbole d'équation $\alpha = \Phi(k)$ peuvent s'obtenir très facilement. Nous sommes alors en possession de toutes les valeurs de k susceptibles de fournir un plan d'expérience pour chaque valeur de b convenable, compte tenu de $b > \alpha + 1$.

Il suffit, alors, pour conclure sur l'existence du plan d'expérience de paramètres $r, \lambda_1, \lambda_2, b, k$, de calculer d qui doit être un nombre entier et t qui doit être un entier positif ou nul.

Nous pouvons aussi très facilement affirmer l'existence ou la non existence de blocs incomplets partiellement équilibrés ayant pour paramètres r, λ_1, λ_2 ($b < v$) et, lorsqu'ils existent, calculer tous les paramètres de première et deuxième espèce.

4/ - Cas particuliers.

$$1^\circ) r = \lambda_1.$$

Les valeurs de b convenables sont telles que $b > \lambda_1 > \lambda_2$

$$t = 0 ; \quad \alpha = \frac{(b - \lambda_1)\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2 b}$$

Le numérateur de α est positif quand le dénominateur est négatif, c'est-à-dire quand $\lambda_1^2 < \lambda_2 b$. Il n'existe aucun plan d'expérience de paramètres $r = \lambda_1, \lambda_2, b$.

THEOREME -

Il n'existe aucun bloc incomplet partiellement équilibré ayant pour paramètres $b, \lambda_1 = r, \lambda_2 < \lambda_1$ ($b < v$) si $\lambda_1^2 < \lambda_2 b$.

Nous allons dresser une liste des valeurs des paramètres λ_i, b et $r \leq 10$ pour lesquelles il n'existe aucun plan d'expériences.

$r=\lambda_1=$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_2									
"									
1 ...	$v > b > 4$	9	16	25	36	49	64	81	100
2 ...		4	8	12	18	24	32	40	50
3 ...			5	8	12	16	21	27	33
4 ...				6	9	12	16	20	25
5 ...					7	9	12	16	20
6 ...						8	10	13	16
7 ...							9	11	14
8 ...								10	12
9 ...									11

2°) $r^2 < \lambda_2 b$.

Dans ces conditions t est toujours négatif. Nous pouvons donc conclure que quel que soit λ_1 , il n'existe aucun bloc incomplet partiellement équilibré de paramètres b, r, λ_2 ($b < v$) si $r^2 < \lambda_2 b$.

Le tableau ci-dessus est donc vrai quel que soit $\lambda_1 > \lambda_2$.

3°) Remarque :

Dans le cas $r = \lambda_1$, nous retrouvons un théorème connu, à savoir que tout bloc incomplet partiellement équilibré de cette espèce s'obtient à partir d'un bloc équilibré en y remplaçant chaque variété par un groupe de n variétés.

En effet :

$$\alpha = \frac{r(b-r)}{r^2 - \lambda_2 b} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{d'après la définition même}$$

Posons :

$$\lambda_2 = \lambda \quad b = \frac{r^2(1+\alpha)}{r+\alpha\lambda}, \quad v = (1+n_1)(1+\alpha)$$

$$r(k-1) = rn_1 + \alpha(n_1+1)$$

$$k = \frac{(1+n_1)(r+\alpha\lambda)}{r}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} 1+n_1 = n \\ 1+\alpha = m \end{cases}$$

$$k = n \left[1 + \frac{\lambda}{r} (m-1) \right] = \frac{rm}{nb}$$

$$b = \frac{r^2 m}{r + (m - 1)}$$

Nous déduisons de l'existence du bloc incomplet partiellement équilibré l'existence du bloc incomplet équilibré de paramètres :

$$v^* = \frac{v}{n} = m, \quad b^* = b, \quad r^* = r, \quad k^* = \frac{k}{n}, \quad \lambda^* = \lambda$$

Réciproquement, supposons l'existence d'un bloc incomplet équilibré de paramètres :

$$v^* = m, \quad b^* = b, \quad r^* = r, \quad k^* = p, \quad \lambda^* = \lambda$$

$$v^* r^* = b^* k^* \longrightarrow pb = rm$$

$$\lambda (m-1) = r(p-1) \longrightarrow b = \frac{r^2 m}{r + \lambda (m-1)}$$

nous en déduisons donc en remplaçant chaque variété par un groupe de n variétés, l'existence du bloc incomplet partiellement équilibré de paramètres : $v = nm$, $b = b$, $r = r$, $k = pn$, $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \lambda$, $n_1 = n - 1$, $n_2 = n(m-1)$, $p_{12}^1 = 0$.

CHAPITRE III

BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT ÉQUILIBRÉ A 4 RÉPÉTITIONS

Nous allons énumérer tous les plans d'expérience de cette catégorie. Pour cela nous résoudrons le système d'équations diophantiennes, imposé aux paramètres de première et deuxième espèce.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} vr = bk \\ v = n_1 + n_2 + 1 \\ \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = r(k-1) \end{array} \right.$$

avec $v, r, b, n_i, > 0$, entiers, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ entiers, $p_{12}^2 = n - \frac{n_1}{n_2} p_{12}^1$
avec $p_{12}^i \geq 0$ entiers.

Le nombre α déjà utilisé dans le chapitre précédent étant entier positif.

Nous savons de plus que tous les paramètres doivent vérifier l'inégalité :

$$(A) \quad (r - \lambda_1) (r - \lambda_2) \geq (\lambda_1 - \lambda_2) [(r - \lambda_2) p_{12}^1 - (r - \lambda_1) p_{12}^2]$$

Pour résoudre ce problème nous allons considérer les différentes valeurs que peut prendre le paramètre k : il est obligatoirement supérieur à 1 (chaque bloc ayant au moins 2 parcelles).

$k = 2, k = 3, k = 4$, alors $b > v$;

$k > 4, b < v$ nous pourrions appliquer les résultats du chapitre précédent.

Les nombres λ_i étant obligatoirement inférieurs à k , nous examinerons toutes les valeurs que peuvent prendre les λ pour chaque valeurs de k .

R.C. Bose, W.H. Clatworthy et S.S. Shirkande ont classé les blocs incomplets partiellement équilibrés connus en 5 types suivant les schémas d'association (c'est-à-dire suivant la façon dont sont formées les classes d'association), nous garderons leurs notations.

1/ - Groupe divisible (GD).

Les variétés $v = nm$ sont rangées en rectangle une variété v_i est première associée des $n-1$ variétés de la même rangée, et deuxième associée des $n(m-1)$ autres.

2/ - Simples (SL).

Chaque fois que λ_2 est nul. Le plan d'expérience sert lui-même de schéma d'association.

3/ - Triangulaire (T).

Le nombre v est de la forme $v = \frac{n(n-1)}{2}$, les variétés sont rangées en rectangle de telle sorte que :

- a) la diagonale principale soit vide.
- b) les variétés soient rangées au-dessus de la diagonale principale.
- c) le dessous de la diagonale principale est symétrique du du dessus.

Pour une variété v_i les premières associées sont sur la même rangée (ou la même colonne).

$$n_1 = 2n - 4$$

$$n_2 = \frac{1}{2} (n-2) (n-3)$$

4/ - Carré latin (LS).

$v = n^2$, nous rangeons les variétés en carré la variété v_i est première associée de celles qui se trouvent, soit dans la même rangée, soit dans la même colonne.

$$n_1 = 2(n-1)$$

$$n_2 = (n-1)^2$$

5/ - Carrés latins orthogonaux.

Nous superposons au carré des n^2 variétés, un carré latin orthogonal formé par les n lettres A, B, ... N.

Chaque variété sera lère associée des variétés de la même rangée, de la même colonne, et des variétés correspondant aux mêmes lettres.

$$n_1 = 3(n-1)$$

$$n_2 = (n-1)(n-2)$$

6/ - Cycliques (C).

Les premières associées de la variété i , s'obtiennent en ajoutant $i-1$ (modulo v) aux variétés premières associées de la variété 1.

En faisant la classification des plans d'expérience envisagés ($r=4$), il nous est apparu qu'il existait d'autres types de schéma d'association que ceux cités.

Nous les considérons comme une généralisation des types carrés latins :

1°) $v = nm$, v_i sera première associée avec les variétés de la même rangée et de la même colonne

$$\begin{cases} n_1 = m + n + 2 \\ n_2 = (n-1)(m-1) \end{cases}$$

2°) $v = nm$, nous superposons un rectangle formé par les permutations circulaires des lettres $A, \dots, N$ ou $A, \dots, M$ et v_i sera première associée des variétés de la même rangée, de la même colonne, et des variétés correspondant à la même lettre.

$$\begin{cases} n_1 = 2(m-1) + n-1 & \text{pour les lettres } A, \dots, N \\ n_1 = 2(n-1) + m-1 & \text{pour les lettres } A, \dots, M \end{cases}$$

I - BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRES, ou $r=4$,
et $k=2$ -

$$\boxed{1/ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1}$$

$$4v = 2b$$

$$2n_1 + n_2 = 4$$

$$v = n_1 + n_2 + 1$$

La résolution de l'équation diophantienne $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = k$ nous donnera les valeurs de n_1 et n_2 .

Nous pouvons ainsi calculer v et b .

Puis posant $p_{21}^1 = t$, $p_{12}^2 = n_1 - t$ devant être positif ou nul, nous en déduirons les valeurs de t convenables, elle devront de plus rendre α entier positif et satisfaire à A.

Ici $2n_1 + n_2 = 4$ a pour seule solution $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ donc :

$$b = 2v = 8$$

$$p_{12}^2 = n - \frac{n_1}{n_2} t = 1 - \frac{t}{2} \quad t \text{ doit être } \underline{\text{pair}}$$

$$\textcircled{A} \text{ s'écrit } 6 \geq 3t - 2p_{12}^2 \quad \text{d'où } t \leq 2$$

$$\text{pour } t = 0, \quad \begin{cases} \gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1 = 1 \\ \beta = p_{12}^2 + p_{12}^1 = 1 \\ \Delta = \gamma^2 + 2\beta + 1 = 4 \\ \alpha = \frac{1}{2} [(v-1)(\sqrt{\Delta} - \gamma + 1) - 2n_1] = 1 \end{cases}$$

la valeur $t=0$ convient. Pour $t=2$, $\gamma = -1$, $\beta = 3$, $\Delta = 8$, α est irrationnel, cette valeur de t ne convient pas.

THEOREME I₁ -

La classe des blocs incomplets partiellement équilibrés à deux classes associées, où $k = 2$, $r = 4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, contient le seul plan d'expérience, $v = 4$, $b = 8$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $p_{21}^1 = 0$.

$$2/ \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0$$

$$2n_1 = 4, \text{ posons } n_2 = X$$

$$v = 3 + X, \quad b = 2(3 + X)$$

$$p_{12}^2 = 2 - \frac{2t}{X} \text{ doit être entier positif ou nul,}$$

$$\begin{array}{ll} \text{donc} & \left\{ \begin{array}{l} X = 1, 2 \\ t = 0 \end{array} \right. \\ \text{soit} & \left\{ \begin{array}{l} X = t \\ X = 2t \end{array} \right. \end{array}$$

l'inégalité (A) s'écrit $4 \geq 4t - 2p_{12}^2$

pour $t = 0$ (A) est vérifiée, $\alpha = \frac{X}{3}$ est entier positif si $X = 3\mu$,

μ entier, $t = 0$ convient

pour $t = 0$ (A) donne $X \leq 1$, d'où $X = 1$

$\alpha = 2$, $t = X = 1$, est une valeur convenable

pour $X = 2t$ (A) s'écrit $2t \leq 3$, soit $t = 1$, soit $t = 0$

$t = 0$ a déjà été étudié.

$t = 1$, $\alpha = 2$ valeur convenable.

pour $X = 2$ (A) s'écrit $t \leq \frac{4}{3}$, soit $t = 0, 1$, cas déjà étudiés.

THEOREME I₂ -

La classe des blocs incomplets partiellement équilibrés, où $r = 4$, $k = 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, contient :

- 1) le plan d'expérience $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $v = 4$, $b = 8$, $t = 1$;
- 2) le plan d'expérience $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $v = 5$, $b = 10$, $t = 1$;
- 3) la classe $n_1 = 2$, $n_2 = 3\mu$, $v = 3(\mu + 1)$, $b = 6(\mu + 1)$, $t = 0$.

$$3/ \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0$$

$n_1 = 4$, posons comme précédemment $n_2 = X$

$$p_{12}^2 = 4 - \frac{4t}{X} \geq 0 \quad \text{donc soit} \quad \begin{cases} t = 0 \\ X = t, 2t, 4t \end{cases}$$

(A) s'écrit $t(1 + \frac{3}{X}) \leq 6$

$t = 0$ donne :

$$\alpha = \frac{X}{5}, \text{ donc } X = 5\mu, \mu \text{ entier}$$

II - PLANS D'EXPERIENCE ou $r = 4$, et $k = 3$.

$$1/ \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$$

$$3n_1 + 2n_2 = 8$$

Les seuls entiers positifs vérifiant cette égalité sont $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, d'où $v = 4$ et $4v = 3b$, $b = \frac{16}{3}$ c'est impossible.

$$2/ \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

$$3n_1 + n_2 = 8$$

deux solutions :

$$n_1 = n_2 = 2, \quad v = 5, \quad b = \frac{20}{3} \text{ impossible}$$

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 5, \quad v = 7, \quad b = \frac{28}{3} \text{ impossible}$$

$$3/ \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0$$

$$3n_1 = 8,$$

cette équation n'a aucune solution entière.

THEOREME II₁ -

Il n'existe aucun bloc incomplet partiellement équilibré ou $k = 3$, $r = 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2, 1, 0$.

$$4/ \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

$$2n_1 + n_2 = 8, \quad b = \frac{4v}{3}$$

Il y a trois solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = 1, \quad n_2 = 6, \quad v = 8, \quad b \text{ n'est pas entier} \\ n_1 = 2, \quad n_2 = 4, \quad v = 7, \quad b \quad " \quad " \quad " \\ n_1 = 3, \quad n_2 = 2, \quad v = 6, \quad b = 8, \quad \textcircled{A} \text{ s'écrit } t \leq 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} \text{ impossible} \\ t = 1, \quad p_{12}^2 \text{ est fractionnaire} \\ t = 2, \quad \alpha = 2 \text{ valeur convenable.} \end{array} \right.$$

THEOREME II₂ -

La classe des blocs incomplets partiellement équilibrés où $r = 4$, $k = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ ne contient que le plan d'expérience

$$n_1 = 3, n_2 = 2, v = 6, b = 8, p_{12}^1 = 2$$

$$5/ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

$$2n_1 = 8, \text{ posons } n_2 = X$$

$b = \frac{4}{3}(5+X)$, une condition nécessaire d'existence est donc que $v = 5 + X = 3\mu$, μ entier positif.

$$(A) \text{ s'écrit } 2 \geq 2t - (4 - \frac{4}{3\mu - 5})t \text{ avec :}$$

$$\text{soit } t = 0$$

$$\text{soit } 3\mu - 5 = t, 2t, 4t.$$

$$a) t = 0, \alpha = \frac{3\mu}{5} - 1, \text{ valeur convenable si } \mu = 5\varphi (\varphi > 0);$$

$$b) 3\mu - 5 = t, (A) \text{ s'écrit } \mu \leq 2.$$

$$\text{Or } t \geq 0 \text{ implique } \mu \geq \frac{5}{3}$$

la seule valeur convenable est $\mu = 2, t = 1, \alpha = 3$

$$c) 3\mu - 5 = 2t, (A) \text{ s'écrit } t \leq 2$$

$$t = 1, \text{ irrationnel}$$

$$t = 2, \alpha = 4, \mu = 3 \text{ valeur convenable}$$

$$d) 3\mu - 5 = 4t, (A) \text{ s'écrit } t \leq \frac{5}{2}, \text{ donc } t = 1, 2$$

$$t = 1, 2 \quad \alpha \text{ est irrationnel.}$$

THEOREME II₃ -

La classe des blocs incomplets partiellement équilibrés où $r = 4$, $k = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ contient :

1/ la classe $n_1 = 4$, $n_2 = 5$ ($3\varphi - 1$), $v = 15\varphi$, $b = 20\varphi$, $t = 0$ φ entier positif.

2/ le plan d'expérience $n_1 = 4$, $n_2 = 1$, $v = 6$, $b = 8$, $t = 1$ note SR_2 dans la classification de Bose.

3/ le plan d'expérience $n_1 = n_2 = 4$, $v = 9$, $b = 12$, $t = 2$ note LS_6 dans la classification de Bose.

Le plan d'expérience SR_2 a pour schéma d'association

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

et pour plan :

$$\begin{array}{l} (1, 2, 3) (1, 2, 6) \\ (4, 5, 6) (4, 5, 3) \\ (1, 5, 6) \\ (4, 2, 3) \end{array}$$

Le plan d'expérience LS_6 a pour schéma d'association :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$$

et pour plan :

$$\begin{array}{l} (1, 2, 3) (1, 4, 7) \\ (4, 5, 6) (2, 5, 8) \\ (7, 8, 9) (3, 6, 9) \\ \text{répétés deux fois.} \end{array}$$

$$6/ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

$$n_1 = 8 \text{ posons } n_2 = X$$

$$v = 9 + X, b = 4 \cdot \frac{9+X}{3}, b \text{ entier exige } 9 + X = 3\mu$$

SR_{21} a pour schéma d'association :

1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12

et pour plan :

(1, 2, 3) (1, 12, 11) (1, 5, 6)
 (12, 8, 7) (5, 7, 3) (8, 3, 4)
 (9, 10, 5) (6, 10, 8) (9, 11, 7)
 (11, 4, 6) (4, 2, 9) (2, 12, 10)

 (1, 8, 9)
 (7, 6, 2)
 (10, 11, 3)
 (4, 12, 5)

T_{23} a pour schéma d'association :

x	1	2	3	4	5
1	x	6	7	8	9
2	6	x	10	11	12
3	7	10	x	13	14
4	8	11	13	x	15
5	9	12	14	15	x

et pour plan :

1	2	6	6	7	10
1	3	7	6	8	11
1	4	8	6	9	12
1	5	9	3	4	13
10	11	13	3	5	14
10	12	14	7	8	13
11	12	15	7	9	14
13	14	15	4	5	15
2	3	10	8	9	15
2	4	11			
2	5	12			

III - BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRES ou $k = 4$ -

$$1/ \quad \lambda_1 = 4$$

(A) s'écrit $t \leq 0$ la seule solution possible est donc $t = 0$

a) $\lambda_2 = 3$ l'équation $4n_1 + 3n_2 = 12$ n'a aucune solution entière positive.

b) $\lambda_2 = 2$ $2n_1 + n_2 = 6$ a pour solutions

soit $n_1 = 2, n_2 = 2$, avec $\alpha = \frac{2}{3}$ qui ne convient pas,

soit $n_1 = 1, n_2 = 4, p_{12}^2 = 1, \alpha = 2$ valeur convenable

c) $\lambda_2 = 1$ $4n_1 + n_2 = 12$

soit $n_1 = 1, n_2 = 8, \Delta = 4, \alpha = 4$

soit $n_1 = 2, n_2 = 4, \Delta = 9, \alpha$ fractionnaire

d) $\lambda_2 = 0$ $n_1 = 3$ posons $n_2 = X$

$p_{12}^2 = 3, \Delta = 16, \alpha = \frac{X}{4}$, d'où $X = 4\mu, \mu$ entier > 0 .

THEOREME III₁ -

Il n'existe aucun bloc incomplet partiellement équilibrés ou $r = 4, k = 4, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$.

Il n'existe qu'un seul plan d'expérience où $r = 4, k = 4, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$, il est noté S_2

$$n_1 = 1, n_2 = 4, v = 6, b = 6, t = 0$$

Il n'existe qu'un seul plan d'expérience où $r = 4, k = 4, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$, il est noté S_{17}

$$n_1 = 1, n_2 = 8, v = 10, b = 10, t = 0$$

Il existe une classe de plans d'expérience où $r = 4, k = 4, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$,

$n_1 = 1, n_2 = 4\mu, v = 2(2\mu + 1) = b, t = 0$ ou μ est entier positif

S_2 a pour schéma d'association :

1 2 3

4 5 6

et pour plan :

1	4	2	5		4	1	5	2
2	5	3	6		5	2	6	3
3	6	1	4		6	3	4	1

S_{17} a pour schéma d'association :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

et pour plan :

5	10	1	6		10	5	7	2
1	6	2	7		6	1	8	3
2	7	3	8		7	2	9	4
3	8	4	9		8	3	10	5
4	9	5	10		9	4	6	1

$$2/ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

$$3n_1 + 2n_2 = 12 \text{ a pour seule solution}$$

$$n_1 = 2, n_2 = 3$$

$$(A) \text{ s'écrit } 2 \geq 2t - p_{12}^2 = (2 + \frac{2}{3})t - 2$$

p_{12}^1 entier positif exige $t = 3 \varphi$ avec $\varphi = 0$ ou $\varphi = 1$

$$(A) \text{ s'écrit alors } \varphi < \frac{1}{2}, \text{ donc seul } \varphi = 0 \text{ convient } \Delta = 9, \alpha = 1.$$

THEOREME III₂ -

Il existe un seul bloc incomplet partiellement équilibré où $r = 4$, $k = 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$,

il est noté R_2 dans la classification de Bose : $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $b = b = 6$, $p_{12}^p = 0$.

C'est un "Group Divisible", son schéma d'association est :

1	3	5
2	4	6

son plan :

1	2	4	6
3	4	6	2
5	6	2	4
2	1	3	5
4	3	5	1
6	5	1	3

$\boxed{3/ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1}$ $3n_1 + n_2 = 12$ cette équation admet 3 couples de solutions :

a) $n_1 = 1, n_2 = 9, p_{12}^2 = 1 - \frac{t}{9}$ les seules valeurs convenables de t sont donc 0 et 9

(A) s'écrit $t < \frac{45}{56}$ ce qui exclut la valeur $t = 9, t = 0, \alpha = \frac{9}{2}$ et n'est pas entier.

b) $n_1 = 2, n_2 = 6, p_{12}^2 = 2 - \frac{t}{3}$ d'où $t = 0, 3, 6$

(A) s'écrit $t < \frac{21}{20}$, ce qui exclut les valeurs 3 et 6 $t = 0, \Delta = 9, \alpha = 2$

c) $n_1 = 3, n_2 = 3, p_{12}^2 = 3 - t$ d'où $t = 0, 1, 2, 3$

(A) s'écrit $t < \frac{9}{8}$ ce qui exclut les valeurs 2 et 3

$t = 0, \Delta = 16, \alpha = \frac{3}{4}$ n'est pas entier

$t = 1, \Delta = 8, \alpha$ est irrationnel

THEOREME III₃ -

Il existe un seul bloc incomplet partiellement équilibré où $r = 4, k = 4, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

il est noté R_8 dans la classification de Bose : $n_1 = 2, n_2 = 6, v = b = 9, p_{12}^1 = 0$

C'est un "Group Divisible", son schéma d'association est :

1 4 7

2 5 8

3 6 9

Son plan :

1 4 7 2

2 5 8 3

3 6 9 4

4 7 1 5

5 8 2 6

6 9 3 7

7 1 4 8

8 2 5 9

8 3 6 1

$$4/ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0$$

 $n_1 = 4$, posons $n_2 = X$

$$p_{12}^2 = 4 - \frac{4t}{X} \text{ ce qui exige } t = 0 \text{ ou } X = t, 2t, 4t$$

a) $t = 0$ (A) s'écrit $1 > 4t - 4 + \frac{4t}{X}$ donc est vérifiée $\Delta = 25$,

$$\alpha = \frac{X}{5} \text{ d'où } X = 5\mu \text{ avec } \mu \text{ entier } > 0.$$

b) $X = t$ (A) donne $t < 1$ d'où $t = X = 0$ ce qui est impossible.c) $X = 2t$ (A) s'écrit $t < \frac{7}{6}$ d'où $t = 1, 0$

$$t = 1, \Delta = 8, \alpha \text{ est irrationnel}$$

 $t = 0$ a été étudié.d) $X = 4t$ (A) s'écrit $t < \frac{5}{4}$ d'où $t = 1, 0$

$$t = 1, \Delta = 13, \alpha \text{ est irrationnel}$$

 $t = 0$ a été étudié.THEOREME III_u -

Les blocs incomplets partiellement équilibrés où $r = 4$, $k = 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$ sont formés par la classe des plans d'expérience :

$$n_1 = 4, n_2 = 5\mu, v = b = 5(\mu + 1), p_{12}^1 = 0 \quad \mu \text{ entier } > 0$$

$$\boxed{5/ \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1}$$

l'équation $2n_1 + n_2 = 12$ admet 5 couples de solutions.

$$a) n_1 = 1, n_2 = 10, p_{12}^2 = 1 - \frac{t}{10} \text{ d'où } t = 0, 10$$

$$(A) \text{ s'écrit } t < \frac{5}{2} \text{ ce qui exclut la valeur } 10 \quad t = 0, \Delta = 4, \alpha = 5.$$

$$b) n_1 = 2, n_2 = 8, p_{12}^2 = 2 - \frac{t}{4} \text{ d'où } t = 0, 4, 8$$

$$(A) \text{ s'écrit } t < \frac{20}{7} \text{ ce qui exclut les valeurs } 4 \text{ et } 8$$

$$t = 0, \Delta = 9, \alpha = \frac{8}{3} \text{ donc ne convient pas}$$

$$c) n_1 = 3, n_2 = 6, p_{12}^2 = 3 - \frac{t}{2}, t = 0, 2, 4, 6$$

$$(A) \text{ s'écrit } t < 3 \quad t = 0, \Delta = 16, \alpha = \frac{3}{2} \text{ ne convient pas}$$

$$t = 2, \Delta = 9, \alpha = 5$$

$$d) n_1 = 4, n_2 = 4, p_{12}^2 = 4 - t, t = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$(A) \text{ s'écrit } t < \frac{14}{5} \text{ ce qui exclut } t = 3, 4$$

$$t = 0, \Delta = 25, \alpha = \frac{4}{5} \text{ ne convient pas}$$

$$t = 1, \Delta = 13, \alpha \text{ est irrationnel}$$

$$t = 2, \Delta = 9, \alpha = 4$$

$$c) n_1 = 5, n_2 = 2, p_{12}^2 = 5 - \frac{5t}{2}, t = 0, 2$$

$$(A) \text{ s'écrit } t \leq 2 \quad \text{d'où } t = 0, 2$$

$$t = 0, \Delta = 36, \alpha = \frac{1}{3}$$

$$t = 2, \Delta = 9, \alpha = \frac{13}{2}$$

THEOREME III₃ -

Les seuls blocs incomplets partiellement équilibrés ou $r=k=4$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ sont les plans d'expérience de la classification de Bose :

$$R_{15} \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 10, \quad v = b = 12, \quad p_{12}^1 = 0$$

$$T_{12} \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 6, \quad v = b = 10, \quad p_{12}^1 = 2$$

$$LS_1 \quad n_1 = 4, \quad n_2 = 4, \quad v = b = 9, \quad p_{12}^1 = 2$$

R_{15} a pour schéma d'association :

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12

et pour plan : $1+i, 2+i, 5+i, 7+i \pmod{12}$ $i = 1, 2, \dots, 11$

T_{12} son schéma d'association est :

x	1	2	3	4
1	x	5	6	7
2	5	x	8	9
3	6	8	x	10
4	7	9	10	x

son plan :

2	10	6	7
10	1	2	5
7	3	8	2
6	2	9	4
1	9	10	8
5	4	3	10
8	7	4	1
3	5	7	9
9	6	1	3
4	8	5	6

LS₁ son schéma d'association est :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

son plan :

1	6	9	2
6	8	2	4
8	1	4	9
9	2	5	7
2	4	7	3
4	9	3	5
5	7	1	6
7	3	6	8
3	5	8	1

$$6/ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

$$n_1 = 6 \text{ posons } n_2 = X, p_{12}^2 = 6(1 - \frac{t}{X})$$

$$\text{d'où } t = 0 \text{ ou } X = t, 2t, 3t, 6t$$

a) $t = 0$ (A) est satisfaite $\Delta = (7)^2$ $\alpha = \frac{X}{7}$ donc $X = 7\mu$ μ entier > 0

b) $X = t$ (A) s'écrit $X \leq 1$ donc $X = 1$, $\Delta = 4$, $\alpha = 4$

c) $X = 2t$ (A) s'écrit $t < \frac{5}{2}$: $t = 1, 2$,

$$\begin{cases} t = 1, \Delta = 13 & \alpha \text{ est irrationnel} \\ t = 2, \Delta = 12 & \alpha \text{ " "} \end{cases}$$

d) $X = 3t$ (A) s'écrit $t \leq 3$: $t = 1, 2, 3$,

$$\begin{cases} t = 1, \Delta = 20 & \alpha \text{ est irrationnel} \\ t = 2, \Delta = 17 & \alpha \text{ " "} \\ t = 3, \Delta = 16, & \alpha = 6 \end{cases}$$

e) $X = 6t$ (A) s'écrit $t < \frac{7}{2}$: $t = 1, 2, 3$;

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 1, \Delta = 29 \text{ } \alpha \text{ est irrationnel} \\ t = 2, \Delta = 24 \text{ } \alpha \text{ " " " } \\ t = 3, \Delta = 21 \text{ } \alpha \text{ " " " } \end{array} \right.$$

THEOREME III₆ -

Les seuls Blocs incomplets partiellement équilibrés où $r=4$, $k=4$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$, sont :

- 1) La classe $n_1 = 6$, $n_2 = 7\mu$, $v = b = 7(\mu+1)$, $p_{12}^1 = 0$
- 2) Le plan d'expérience SR_7 , $n_1 = 6$, $n_2 = 1$, $v = b = 8$, $p_{12}^1 = 1$
- 3) " " " T_2 , $n_1 = 6$, $n_2 = 3$, $v = b = 10$, $p_{12}^1 = 2$
- 4) " " " $n_1 = 6$, $n_2 = 9$, $v = b = 16$, $p_{12}^1 = 3$

SR_7 a pour schéma d'association :

1	2	3	4
5	6	7	

et pour plan :

1	2	3	4
5	6	7	8
2	7	8	1
6	3	4	5
3	8	1	6
7	4	5	2
4	1	6	7
8	5	2	3

T_2 a pour schéma d'association :

x	1	2	4	7
1	x	3	5	8
2	3	x	6	9
4	5	6	x	10
7	8	9	10	x

et pour plan :

1	2	3	4	2	1	4	3
5	6	7	1	6	5	1	7
8	9	2	5	9	8	5	2
10	3	6	8	3	10	8	6
4	7	9	10	7	4	10	9

$$\boxed{7/ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0} \quad n_1 = 12, \text{ posons } n_2 = X$$

$$p_{12}^2 = 13 \left(1 - \frac{t}{X}\right) \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} t = 0 \\ X = t, 2t, 3t, 4t, 6t, 12t \end{cases}$$

a) $t = 0$ (A) est vérifiée $\alpha = \frac{X}{13}$, donc $X = 13\mu$, μ entier > 0

b) $X = t$ (A) s'écrit $X \leq 3 : 3 :$

$$\begin{cases} X = t = 1, \Delta = 4, \alpha = 7 \\ X = t = 2, \Delta = 9, \alpha = 10 \\ X = t = 3, \Delta = 16, \alpha = 12 \end{cases}$$

c) $X = 2t$ (A) s'écrit $t \leq \frac{15}{2}$ d'où $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$t = 1, \Delta = 40, \alpha$ est irrationnel ; il en est de même pour

$t = 2, 3, 5, 7$

$t = 4, \alpha = \frac{56}{10}$ n'est pas entier.

$t = 6, \Delta = 25, \alpha = 12$

d) $X = 3t$ (A) s'écrit $t \leq 9$, d'où $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ est irrationnel

$t = 5, \Delta = 6, \alpha = 7$

$t = 9, \Delta = 36, \alpha = 24$

e) $X = 4t$ (A) s'écrit $t \leq \frac{39}{4}$, d'où $t = 1, \dots, 9$

$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ est irrationnel

$t = 8, \Delta = 36, \alpha = 20$

f) $X = 6t$ (A) s'écrit $t \leq \frac{21}{2}$, d'où $t = 1, \dots, 10$

$t = 1, 2, 3, 4, 5, \bar{7}, 8, 9, 10$, est irrationnel

$t = 6, \Delta = 49, \alpha = 12$

g) $X = 12t$ (A) s'écrit $t \leq \frac{45}{4}$, d'où $t = 1, \dots, 11$

est toujours irrationnel.

THEOREME III₇ -

Les seuls blocs incomplets partiellement équilibrés, où $r = k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ sont :

1) la classe des plans d'expérience

$n_1 = 12, n_2 = 13, \mu, v = b = 13(\mu + 1), p_{12}^1 = 0 \quad \mu \text{ entier} > 0$

2) les 4 plans d'expérience de la classification de Bose :

R_{24}	$n_1 = 12,$	$n_2 = 1,$	$v = b = 14,$	$p_{12}^1 = 1$
R_{27}	12,	2,	15,	2
SR_{40}	12,	3,	16,	3
Sl_{12}	12,	27,	40,	9

3) les 4 nouveaux plans d'expérience :

$n_1 = 12, n_2 = 12, v = b = 25, p_{12}^1 = 6$
12, 15, 28, 5
12, 32, 45, 8
12, 36, 49, 6

R_{24} a pour schéma d'association (groupe divisible) :

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

et pour plan :

2	3	5	8	10	11	13	2
3	4	6	9	11	12	13	3
4	5	7	10	14	8	10	6
5	6	1	11	13	14	9	5
6	7	2	12	8	9	11	7
7	1	3	13	12	13	8	4
1	2	4	14				
9	10	12	1				

R_{27} "Group divisible" a pour schéma d'association :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

et pour plan :

$$2 + i, 4 + i, 5 + i, 13 + i$$

module 15

avec $i = 0, 1, \dots, 14$

SR_{40} "Group divisible" a pour schéma d'association :

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

et pour plan :

2	3	1	4	1	15	14	16
15	10	8	9	6	9	12	3
16	11	13	6	4	13	7	10
14	12	5	7	8	5	2	11
7	8	6	1	10	1	11	12
3	16	10	5	9	7	16	2
11	4	9	14	13	14	3	8
12	2	15	13	5	6	4	15

S_{12}

5	6	7	1	3	5	13	9	9	39	16	26
15	1	14	16	4	10	12	5	16	38	27	10
23	24	1	25	7	30	38	22	29	26	23	2
1	33	34	32	14	2	20	17	31	23	3	27
2	8	5	11	18	3	22	14	30	28	4	23
27	17	37	6	19	14	21	4	39	11	24	18
6	18	35	28	11	15	36	30	24	40	17	12
26	19	6	36	12	35	15	31	38	13	19	24
20	7	31	39	13	37	29	15	37	22	25	8
21	29	40	7	8	16	28	40	25	21	9	35
40	36	32	3	32	4	39	37	33	27	11	21
32	4	39	37	33	27	11	21	22	12	26	33
28	20	33	13	34	31	8	19	17	9	30	34
10	34	18	29								

IV - BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRES ou $k > 4$.

Dans ce cas $k > r$, donc $v > b$, nous pouvons appliquer les résultats du chapitre précédent.

1/ $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda = 3, 2, 1$

Nous avons vu que dans ce cas $t = 0$ et

THEOREME IV -

Les seuls Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés où $k > 4$, $\lambda_1 = 4, \lambda_2 \neq 0$, sont obtenus à partir des Blocs incomplets équilibrés ayant pour paramètres: $v^* = m, b^*, r^* = 4, k^* = p, \lambda = 1, 2, 3$, en y remplaçant chaque variété par un groupe de n vanetes.

2/ $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$

$\alpha = \frac{b-4}{4}$, donc $b = 4(1+\alpha), n_1 = k-1, n_2 = \alpha k$

THEOREME IV₂ -

Les seuls Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés où $k > 4$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$ forment la classe de plans d'expérience :

$$n_1 = k - 1, n_2 = \alpha k, v = k(1 + \alpha), b = 4(1 + \alpha), p_{12}^1 = 0$$

où α est entier positif.

$$3/ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

Nous reprenons les notations du chapitre précédent.

$$3n_1 + 2n_2 = 4u$$

et :

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \quad \text{d'où} \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_2 = -1$$

$$n_1 = 4u - 2\rho$$

$$n_2 = -4u + 3\rho$$

$$n_1 \geq 1 \quad \text{donne} \quad \rho \leq 2u - 1$$

$$n_2 \geq 1 \quad \text{donne} \quad \rho \leq \frac{4u + 1}{3}$$

$$b = \frac{4(1 + \rho)}{1 + u}, \quad \rho = -1 + \frac{b(u + 1)}{4}$$

la limitation sur ρ fournit : $\frac{16}{3} \leq b \leq \frac{8u}{u + 1}$

$$6 \leq b \leq 7$$

$$a) \quad b = 6 \quad \alpha = \frac{8(u + 1)}{4 + 7} \quad \text{avec} \quad \alpha \leq b - 1 + 5 \quad \text{donc} \quad u \leq 9$$

$$\alpha = 8 - \frac{48}{u + 7} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{doit être entier } 0, \text{ et } u > 3 \\ u + 7 \text{ doit diviser } 3 \cdot 2 \end{array} \right.$$

$$u + 7 = 3 \cdot 2^2 \quad u = 5 \quad \rho = 8 \quad n_1 = 4 \quad n_2 = 4 \quad t = 2$$

$$u + 7 = 2^4 \quad u = 9 \quad \rho = 14 \quad n_1 = 8 \quad n_2 = 6 \quad t = 3$$

$$b) \quad b = 7 \quad \alpha = \frac{3^2 \cdot 2^3(u + 7)}{5u + 33} \quad \text{avec} \quad \alpha \leq 6 \quad \text{et} \quad \rho = \frac{7u + 3}{4}$$

$$\alpha = 14 + \frac{2}{5} - \frac{3^2 \cdot 2^5 \cdot 7}{5(5u + 33)} = 14 + \varphi, \quad \varphi \text{ entier}$$

de plus $\frac{t}{n_2} = \frac{1}{6}$, avec $n_2 = \frac{5u + 9}{4}$

Il faut donc que $5u + 9 = 24.X$ $\alpha \leq 6$ entraîne $5u + 33 \leq 3.2^4$

$$5u + 33 = 2^4.3^2.7$$

$$= 3^2.7$$

$$= 3^2.2^5$$

toutes ces valeurs rendent φ entier, mais $\alpha > 6$ donc ne conviennent pas.

THEOREME IV₃ -

Les seuls Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés de la classe $r = 4$, $k > 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ sont :

$$b = 6 \quad k = 10 \quad v = 15 \quad n_1 = 8 \quad n_2 = 6 \quad t = 3 \quad T_{25}$$

$$b = 6 \quad k = 6 \quad v = 9 \quad n_1 = 4 \quad n_2 = 4 \quad t = 2 \quad LS_8$$

$$4/ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

$$(A) \text{ s'écrit } 3 = 6t - 2p_{12}^2$$

Cette équation n'a aucune solution entière et > 0 .

THEOREME IV₄ -

Il n'existe aucun Bloc Incomplet Partiellement équilibré où $k > 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$

$$5/ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0$$

$$(A) \text{ s'écrit } 4 = 12 p_{12}^1 - 3 p_{12}^2$$

Cette équation n'a aucune solution entière et positive.

THEOREME IV₅ -

Il n'existe aucun Bloc Incomplet Partiellement équilibré où $k > 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$.

$$6/ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

$$2n_1 + n_2 = 4u$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} n_1 = 4u - \rho \\ n_2 = -4u + 2\rho \end{cases}$$

$$n_1 \geq 1, n_2 \geq 1 \quad \text{donnent} \quad 1 - 2u \leq \rho \leq 4u - 1$$

$$\text{avec } \rho = - \frac{b(u+1)}{4}$$

$$\text{finalement } 8 \leq b \leq 15$$

$$\text{a) } b = 8 \quad \alpha = \frac{4}{3}(u+1), \quad n_2 = 2, \quad t = 1$$

$$\alpha < b - 1 = 7$$

Il faut et suffit pour assurer l'existence du plan d'expérience que $k = u + 1 = 3\mu$

avec $4\mu < 7$, c'est-à-dire $\mu \leq 1$

or $\mu = 1$ donne $k = 3 < 4$.

Il n'y a donc aucun plan d'expérience de cette catégorie avec $b=8$.

$$\text{b) } b = 9 \quad \alpha = \frac{2^3 \cdot 5^2(u+1)}{7u+115} = 8 + \frac{4}{7} - \frac{2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^3}{7(7u+115)} = 8 - \varphi$$

$$\alpha \leq 7 \text{ exige } \varphi \text{ entier } \geq 0$$

$$\alpha > 0 \quad - \quad - \quad - \quad \leq 8$$

de plus $\frac{t}{n_2} = \frac{7}{10}$, $2n_2 = u + 5$ doit être multiple de 20.

La seule valeur remplissant ces conditions est :

$$\begin{cases} 7u + 115 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, & u + 5 = 760 \\ b = 9, & k = 756, \quad t = 266, \quad n_1 = 1320 \end{cases}$$

$$\text{c) } b = 10 \quad \alpha = \frac{24(u+1)}{u+11} \leq 9, \text{ exige } u \leq 5$$

$$= -1 \frac{5(u+1)}{2} \quad u + 1 \text{ doit être pair}$$

$$t = \frac{n_2}{2} = \frac{u+3}{2}$$

La seule valeur de u convenable est, en fin de calcul $u = 5$.

$$\text{d) } b = 11 \quad \alpha = \frac{7^2 \cdot 8(u+1)}{15u+3 \cdot 49} = 26 + \frac{2}{15} - \frac{7^2 \cdot 2^5 \cdot 11}{15(5u+49)} \leq 10$$

Cette condition s'écrit finalement $u \leq 3$ il n'y a donc aucune solution.

$$e) b = 12 \quad \alpha = \frac{2^5(u+1)}{u+10} = 2^5 - \frac{3^2 \cdot 2^5}{u+10} \leq 11 \text{ d'où } u \leq 3$$

Il n'y a aucune solution.

$$f) b = 13 \quad \alpha = \frac{3^3 \cdot 2^3(u+1)}{5u+57} = 43 + \frac{1}{5} - \frac{3^2 \cdot 2^5 \cdot 13}{5(5u+57)} \leq 12$$

Cette dernière condition s'écrit $u \leq 3$ il n'y a donc aucune solution.

$$g) b = 14 \quad \alpha = \frac{200(u+1)}{3u+45} = 66 + \frac{2}{3} - \frac{200 \cdot 14}{3(u+15)} \leq 13$$

Condition qui s'écrit $u \leq 7$; or toutes les valeurs de u qui rendent α entier sont supérieures à 7.

$$\begin{aligned} h) b = 15 \quad \alpha &= \frac{2^3 \cdot 11^2(u+1)}{7u+17 \cdot 11} = 138 + \frac{2}{7} - \frac{180}{7(7u+187)} \\ &= 138 + \frac{14u+194}{7(7u+187)} \end{aligned}$$

or 194 n'est pas divisible par 7.

Il n'y a aucune solution.

THEOREME IV₆ -

Les seuls blocs incomplets partiellement équilibrés de la classe $r = 4$, $k > 4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ sont :

1) le plan T_{22} : $b = 10$, $k = 6$, $v = 15$, $t = 4$, $n = 6$, $n_2 = 8$

2) le plan de paramètres : $b = 9$, $k = 756$, $v = 1701$, $t = 266$, $n_1 = 1320$.

V - CONCLUSION - CAS D'IMPOSSIBILITE - SCHEMA DES NOUVEAUX PLANS D'EXPERIENCE TROUVES PRECEDEMMENT -

Chaque fois que les plans d'expérience obtenus, étaient déjà connus, nous avons donné la référence de la classification de Bose, ainsi que le schéma d'association et le tableau du plan.

Nous avons démontré, que dans 6 cas il n'existait aucun bloc incomplet partiellement équilibré de la catégorie envisagée ceci pour les valeurs des paramètres :

$r = 4,$	$k = 3,$	$\lambda_1 = 3,$	$\lambda_2 = 2$
$r = 4,$	$k = 3,$	$\lambda_1 = 3,$	$\lambda_2 = 1$
$r = 4,$	$k = 3,$	$\lambda_1 = 3,$	$\lambda_2 = 0$
$r = 4,$	$k = 4,$	$\lambda_1 = 4,$	$\lambda_2 = 3$
$r = 4,$	$k > 4,$	$\lambda_1 = 3,$	$\lambda_2 = 1$
$r = 4,$	$k > 4,$	$\lambda_1 = 3,$	$\lambda_2 = 0$

En recherchant systématiquement tous les blocs incomplets partiellement équilibrés où $r = 4$, nous avons démontré l'existence de nouveaux plans d'expérience ne figurant pas dans la classification de Bose.

Nous allons donner ici la liste de ces plans, leurs schémas d'association, et leurs tableaux.

$$1/ \quad k = 2, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad v = 4, \quad b = 8, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad p_{21}^1 = 0.$$

C'est un "group divisible", son schéma d'association est :

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$$

son tableau :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}$$

$$2/ \quad k = 2, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad v = 4, \quad b = 8, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 1, \quad p_{12}^1 = 1.$$

C'est un "group divisible", ayant même schéma d'association que le premier.

Son tableau est :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

$$3/ \quad k = 2, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad v = 5, \quad b = 10, \quad n_1 = n_2 = 2, \quad p_{12}^1 = 1.$$

$$7/ \quad k = 3, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad v = 6, \quad b = 8n \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 2, \quad p_{12}^1 = 1.$$

C'est un "group divisible". Son schéma d'association :

1	2	3
4	5	6

son plan :

1	1	1	1	2	2	3	4
2	2	4	3	3	4	6	5
3	5	6	4	6	5	5	6

$$8/ \quad k = 4, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad v = 16, \quad b = 16, \quad n_1 = 6, \quad n_2 = 9, \quad p_{12}^1 = 3.$$

C'est un carré latin. Son schéma d'association est :

1	2	3	4
5	8	11	14
6	9	12	15
7	10	13	16

son tableau :

1	1	2	3	4	7	6	5
2	5	8	11	14	10	9	8
3	6	9	12	15	12	12	11
4	7	10	13	16	16	15	14

répété deux fois

$$9/ \quad k = 4, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad v = 25, \quad b = 25, \quad n_1 = 12, \quad n_2 = 12, \quad p_{12}^1 = 6.$$

C'est un plan d'expérience type carré latin.

Son schéma d'association est :

1	A	2	B	3	C	4	D	5	E
6	E	7	A	8	B	9	C	10	D
11	D	12	E	13	A	14	B	15	C
16	C	17	D	18	E	19	A	20	B
21	B	22	C	23	D	24	E	25	A

son tableau :

1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
8	12	17	22	6	11	16	23	6	11	16	23	6	12	16	21
9	14	18	23	9	13	18	24	7	12	19	24	7	13	18	22
10	15	20	24	10	15	19	25	10	14	20	25	8	15	20	25
				5	5	5	5	6	7	8	9	10			
				7	11	16	21	22	11	12	13	19			
				8	13	17	22	23	14	16	18	21			
				9	14	19	23	25	15	17	20	24			

$$10/ \quad k=4, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=0, \quad v=28, \quad b=28, \quad n_1=12, \quad n_2=15, \quad p_{12}^1=5.$$

C'est un plan triangulaire. Son schéma d'association est :

x	1	2	4	7	11	16	22
1	x	3	5	8	12	17	23
2	3	x	6	9	13	18	24
4	5	6	x	10	14	19	25
7	8	9	10	x	15	20	26
11	12	13	14	15	x	21	27
16	17	18	19	20	21	x	28
22	23	24	25	26	27	28	x

CHAPITRE IV

ANALYSE DE LA VARIANCE D'UN BLOC INCOMPLET PARTIELLEMENT ÉQUILIBRÉS A m CLASSES ASSOCIÉES

L'analyse de la variance de "Bloc Incomplet Equilibré" et celle du "Bloc Incomplet Partiellement Equilibré" présentent de nombreuses analogies provenant des analogies de leurs définitions. Nous allons les mettre en évidence en établissant l'analyse de la variance du Bloc Incomplet Partiellement Equilibré dans le cas le plus général.

Dans les deux cas, nous considérerons le plan d'expérience comme une double classification, suivant les variétés et suivant les blocs; ce qui nous permet d'obtenir deux sortes d'informations provenant des expériences : les informations "intra-bloc" fournies par la comparaison des variétés à l'intérieur des blocs, et les informations "inter-bloc" fournies par la comparaison des variétés entre les blocs.

Nous utiliserons pour représenter le schéma du plan d'expérience, la matrice d'incidence, déjà rencontrée dans le chapitre II.

$N = (n_{ij})$ où $\begin{cases} n_{ij} = 1 & \text{si la } i\text{ème variété apparaît dans le } j\text{ème bloc.} \\ n_{ij} = 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

Dans les cas de blocs incomplets équilibrés et partiellement équilibrés, les n_{ij} sont liés par les relations :

$$\sum_L n_{ij} = k \quad \text{nombre de parcelles d'un bloc.}$$

$$\sum_j n_{ij} = r \quad \text{" " répétitions d'une variété.}$$

$$\sum_j n_{ij}^2 = r \quad \text{" " " " " "}$$

$$\sum_j n_{ij} n_{sj} = \lambda_{is} \quad \text{" " blocs contenant à la fois la variété } i \text{ et la variété } s.$$

dans le cas du bloc incomplet équilibré $\lambda_{is} = \lambda$

dans le cas du bloc partiellement équilibré $\lambda_{is} = \lambda_u$; i et s étant u^{ème} associées.

Nous garderons la notation λ_{is} pour traiter les deux cas en même temps.

Estimation "intra-bloc"

Nous supposons de façon générale, que le plan d'expérience est tel qu'il n'y a pas d'interaction entre les blocs et les variétés. Si nous appelons y_{ij} le résultat observé en appliquant la variété i au bloc j , nous pouvons écrire :

$$y_{ij} = \mu + v_i + b_j + e_{ij}$$

de telle sorte que y_{ij} est la somme :

- d'un facteur μ contribution commune.
- d'un facteur v_i contribution de la variété i .
- d'un facteur b_j contribution du bloc j .
- d'un facteur e_{ij} erreur normale, de moyenne nulle sans relation avec les autres e_{ij} et de variance σ^2 .

Pour obtenir la meilleure estimation sans distorsion de y_{ij} nous savons en appliquant le théorème de Markoff, qu'il est nécessaire et suffisant de rendre minimum l'expression :

$$\sum_{ij} (y_{ij} - \mu - v_i - b_j)^2$$

Différentiations par rapport à v_i :

$$\sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{v}_i - \hat{b}_j) = 0$$

Somme étendue à l'ensemble des blocs contenant la variété i .
expression qui s'écrit :

$$\sum_j y_{ij} = \sum_j n_{ij} (\hat{\mu} + \hat{v}_i) + \sum_j n_{ij} \hat{b}_j$$

employons la notation :

$$\sum_j y_{ij} = Y_i.$$

$$a) \quad Y_i = r(\hat{\mu} + \hat{v}_i) + \sum_j n_{ij} \hat{b}_j$$

Différentions par rapport à b :

$$\sum_i (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{v}_i - \hat{b}_j) = 0$$

Somme étendue à toutes les variétés du jème bloc.

ou :

$$\sum_i y_{ij} = \sum_i n_{ij} (\hat{\mu} + \hat{b}_j) + \sum_i n_{ij} \hat{v}_i$$

employons la notation :

$$\sum_i y_{ij} = Y_{.j}$$

b)
$$Y_{.j} = k (\hat{\mu} + \hat{b}_j) + \sum_i n_{ij} \hat{v}_i$$

remarquons qu'en faisant la somme des v équations a), ou des b équations b), nous obtenons :

c)
$$\sum_{i,j} y_{ij} = Y_{..} = bk \hat{\mu} + \sum_j k \hat{b}_j + \sum_i r \hat{v}_i$$

L'équation b) peut s'écrire :

$$k(\hat{\mu} + \hat{b}_j) = Y_{.j} - \sum_i n_{ij} \hat{v}_i$$

en rapportant dans l'équation a) :

$$k Y_{i.} = kr \hat{v}_i + \sum_j n_{ij} Y_{.j} - \sum_i n_{ij}^2 \hat{v}_i - \sum_{s \neq i} \left(\sum_j n_{ij} n_{sj} \hat{v}_s \right)$$

que nous écrivons, en tenant compte des relations entre les n_{ij} :

(I)
$$(kr - r) \hat{v}_i - \sum_{s \neq i} \lambda_{is} \hat{v}_s = k Y_{i.} - \sum_j n_{ij} Y_{.j}$$

$$= k V_i - T_i = c_i$$

où V_i est le total des observations pour la variété i ;

et T_i est le total des observations pour les blocs contenant la variété i .

Si nous appelons C le vecteur colonne : $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_v \end{bmatrix}$

et $\hat{V}$ le vecteur colonne : $\hat{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_v \end{bmatrix}$

A la matrice (a_{ij}) avec
$$\begin{cases} a_{ij} = -\lambda_{ij} \\ a_{ii} = r(k-1) \end{cases}$$

Le système (I) s'écrit :

$$C = A \cdot \hat{V}$$

Estimation "inter-bloc".

Pour comparer les variétés en utilisant les résultats fournis par tout un bloc, nous écrirons comme précédemment :

$$Y_{.j} = k\mu + \sum_i n_{ij} v_i + kb_j$$

où b_j est une erreur normale, de moyenne nulle, sans relation avec les autres b , et de variance $\frac{1}{k} (\sigma^2 + k\sigma_b^2)$.

Pour obtenir la meilleure estimation sans distorsion de $Y_{.j}$ nous rendons minimum l'expression :

$$\sum_j (Y_{.j} - k\tilde{\mu} - \sum_i n_{ij} \tilde{v}_i)^2$$

Différentiations par rapport à $\tilde{v}_i$

$$\sum_j (Y_{.j} - k\tilde{\mu} - \sum_i n_{ij} \tilde{v}_i) = 0$$

Somme étendue à l'ensemble des blocs contenant la variété i .

ou encore :

$$rk\tilde{\mu} + \sum_s (\sum_j n_{ij} n_{js}) \tilde{v}_s = \sum_j n_{ij} Y_{.j}$$

comme la moyenne des $\tilde{v}_i$ est nulle :

$$Y_{..} = r \sum_i \tilde{v}_i + bk\tilde{\mu} = bk\tilde{\mu}$$

et, tenant compte des relations entre les n_{ij} :

$$\sum_s (\sum_j n_{ij} n_{sj}) \tilde{v}_s = \sum_j n_{ij} Y_{.j} - \frac{r Y_{..}}{b}$$

soit :

$$r \tilde{v}_i + \sum_{s \neq i} \lambda_{is} \tilde{v}_s = T_i - \frac{r Y_{..}}{b} = \tilde{c}_i$$

où T_i est le total des observations pour les blocs contenant la variété i .

Si nous appelons $\tilde{C}$ le vecteur colonne : $\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_v \end{bmatrix}$

A la matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ avec $\begin{cases} \tilde{a}_{ij} = \lambda_{ij} \\ \tilde{a}_{ii} = r \end{cases}$

Le système (II) s'écrit :

$$\tilde{A} \cdot \tilde{V} = \tilde{C}$$

Estimation "intra-inter-bloc".

Si nous connaissons $W = \frac{1}{\sigma^2}$ et $W' = \frac{1}{\sigma^2 + k\sigma_b^2}$ nous obtiendrons la meilleure estimation sans distorsion des variétés en combinant les estimations pondérées précédentes. Nous la noterons v_i^* , et nous l'obtiendrons en rendant minimum :

$$W \sum_{ij} (y_{ij} - \mu - b_j - v_i)^2 + \frac{W'}{k} \sum_j (Y_{.j} - k\mu - \sum_i n_{ij}v_i)^2$$

En combinant les deux systèmes matriciels déjà obtenus nous obtenons le nouveau système matriciel :

$$W (C - A V^*) + W' (\tilde{C} - \tilde{A} V^*) = 0$$

ou encore :

$$W C + W' \tilde{C} = (W A + W' \tilde{A}) V^*$$

Posons :

$$P = W C + W' \tilde{C} = W (kv - T) + W' (T - \frac{rY_{..}}{b} U)$$

où V , T sont déjà définis, et U est le vecteur colonne unité.

Ce système s'écrit :

(III)

$$P = B \cdot V^*$$

avec $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = W a_{ij} + W' \tilde{a}_{ij}$

si nous posons :

$$\begin{cases} \alpha = r(W(k-1) + W') \\ \beta = W' - W \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{ij} = \beta \lambda_{ij} \\ b_i = \alpha \end{cases}$$

Lorsque nous connaissons les λ_{ij} , nous pouvons grâce au système (III) calculer les $\hat{v}_i$.

Cas du bloc incomplet équilibré.

Si nous appliquons le résultat précédent, dans le cas de l'estimation intra-bloc par exemple, au Bloc Incomplet Équilibré, les équations (III) s'écrivent :

$$\hat{c}_i = \alpha \hat{v}_i + \beta \lambda \sum_{j=1}^k \hat{v}_j$$

ou encore en tenant compte du fait que $\sum_{i=1}^r \hat{v}_i = 0$

$$\hat{c}_i = (\alpha - \beta \lambda) \hat{v}_i$$

La différence des $\hat{v}_i$ est donc estimée par la différence :

$$\frac{\hat{c}_i - \hat{c}_t}{r(k-1) + \lambda} = \frac{\hat{c}_i - \hat{c}_t}{\lambda v}$$

et la variance est : $\frac{2k}{v} \sigma^2$

Dans le cas de l'estimation inter-bloc, $W=0$, $W'=1$.

Les équations (III) s'écrivent :

$$\tilde{c}_i = (r-\lambda) \tilde{v}_i$$

La différence de deux $\tilde{v}$ est estimée par :

$$\frac{\tilde{c}_i - \tilde{c}_t}{r - \lambda}$$

la variance étant : $\frac{k}{r-\lambda} (\sigma^2 + k\sigma_b^2)$.

Nous retrouvons ainsi brièvement les résultats connus de l'analyse de la variance du Bloc Incomplet Équilibré, à savoir que la variance est

la même pour n'importe quel couple de variétés. Ceci provient du fait que λ est une constante, nous allons vérifier, dans le cas du Bloc Incomplet Partiellement Equilibré l'influence du facteur λ_{ij} .

Cas du Bloc Incomplet Partiellement Equilibré à m classes associées.

Les λ_{ij} font partie d'un groupe de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$.

Nous allons chercher un système matriciel utilisant les paramètres de deuxième espèce.

Faisons choix d'une variété i , et appelons (S_{iu}) l'ensemble des variétés $u^{\text{èmes}}$ associées de i ; notons G_{iu} la somme des v_j^* pour tout $j \in S_{iu}$. Le système (III) s'écrit :

$$P_i = \alpha v_i + \beta \sum_{u=1}^m \lambda_u G_{iu}$$

Faisons la somme de ces équations pour les n_u variétés qui sont $u^{\text{èmes}}$ associées de la variété i :

$$\begin{aligned} \sum P_{iu} &= \alpha G_{iu} + \beta \lambda_1 (p_{u1}^1 B_{i1} + \dots + p_{u1}^m G_{im}) \\ &+ \dots \\ &+ \beta \lambda_u (n_u v_i + p_{uu}^1 G_{i1} + \dots + p_{uu}^m G_{im}) \\ &+ \dots \\ &+ \beta \lambda_m (p_{um}^1 G_{i1} + \dots + p_{um}^m G_{im}) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons les $m+1$ équations :

$$\begin{aligned} P_i &= \alpha v_i^* + \beta \sum_{j=1}^m \lambda_j G_{ij} \\ P_{ij} &= \beta \lambda_j n_j v_i^* + \sum_k \left[\alpha \delta_j^k + \beta \sum_u \lambda_u p_{ju}^k \right] G_{ik}, \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned}$$

où δ_j^k est le symbole de Kroneker.

Si nous imposons la condition :

$$v_i^* + \sum_{u=1}^m G_{iu} = 0$$

nous pouvons réduire ce système à un système de m équations à m inconnues :

$$G_{im} = -v_i^* - \sum_{u=1}^{m-1} G_{iu}$$

$$P_i = \alpha v_i^* + \beta \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j G_{ij} - \beta \lambda_m (v_i^* + \sum_{u=1}^{m-1} G_{iu})$$

$$P_i = (\alpha - \beta \lambda_m) v_i^* + \beta \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_m) G_{ij}$$

$$\Sigma P_{ij} = \beta \lambda_j n_j v_i^* + \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha \delta_j^k + \beta \sum_{u=1}^m \lambda_u p_{ju}^k) G_{ik} - \beta \sum_{u=1}^m \lambda_u p_{ju} (v_i^* + \sum_{k=1}^{m-1} G_{ik})$$

$$= \beta (\lambda_j n_j - \sum_u \lambda_u p_{ju}^m) v_i^* + \sum_{u=1}^{m-1} \left[\alpha \delta_j^k + \beta \sum_u \lambda_u (p_{ju}^k - p_{ju}^m) \right] G_{ik}$$

$$j = 1, \dots, m-1.$$

Système que nous écrirons sous forme matricielle :

(IV)

$$\Pi = M \cdot Z$$

avec pour Π le vecteur colonne

$$\Pi = \begin{bmatrix} P_i \\ \Sigma P_{ij}, j = 1, \dots, m-1. \end{bmatrix}$$

Z le vecteur colonne

$$Z = \begin{bmatrix} v_i \\ G_{ij} \end{bmatrix}$$

et la matrice M :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \lambda_m & \beta (\lambda_1 - \lambda_m) & \dots & \beta (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \\ \beta (\lambda_1 n_1 - \sum_u \lambda_u p_{1u}^m) & \alpha + \beta \sum_u \lambda_u (p_{1u}^1 - p_{1u}^m) & \dots & \beta \sum_u \lambda_u (p_{1u}^{m-1} - p_{1u}^m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta (\lambda_{m-1} n_{m-1} - \sum_u \lambda_u p_{m-1u}^m) & \beta \sum_u \lambda_u (p_{m-1u}^1 - p_{m-1u}^m) & \dots & \alpha + \beta \sum_u \lambda_u (p_{m-1u}^{m-1} - p_{m-1u}^m) \end{bmatrix}$$

Appelons Δ le déterminant de M .

Ce déterminant n'est pas nul ; le système (IV) est, en effet équivalent au système (III), et $|B|$ n'est pas nul. Si nous résolvons ce système de Cramer seule l'inconnue v_i^* nous intéresse.

Appelons A_i^j le mineur du terme a_j^i de la i ème colonne et de la j ème ligne, dans .

$$v_i^* = \frac{A_1^1 P_i + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \Sigma P_{i,j}}{\Delta}$$

Pour obtenir $\hat{v}_i$, il suffit de faire $W' = 0$, $W = 1$ dans v_i^* ; et pour $\tilde{v}_i$, $W = 0$, $W' = 1$.

L'expression de v_i^* a été donnée par Rao C.R., dans les cas $m=2$ et $m=3$.

Estimation de la différence de deux variétés.

Nous allons traiter en même temps le cas de l'estimation "intra-bloc" et de l'estimation "inter-bloc", il suffira de remplacer W par 1 et W' par 0, dans le premier cas, W par 0 et W' par 1, dans le second cas.

$$v_i^* - v_k^* = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} A_1^{j+1} (\Sigma P_{i,j} - \Sigma P_{k,j})$$

expression que nous pourrions écrire en fonction de V_i et V_k , si les variétés i et k sont tèmes associées ($t \neq m$), V_i apparait dans :

$$P_i = \Sigma P_{i,0} \quad \text{et} \quad \Sigma P_{k,t}, \quad \text{car :}$$

$$P_i = kV_i - T_i, \quad \Sigma P_{k,t} = k(\Sigma V - \Sigma T)$$

de même V_k apparait dans $P_k = \Sigma P_{k,0}$ et $\Sigma P_{i,t}$.

La variance de la différence est donc :

$$\frac{2k}{\Delta} \left[A_1^i - A_1^{t+1} \right] \sigma^2$$

La variance de la différence de deux variétés dépend de leur classe d'association, (de la valeur algébrique de A).

Si ces deux variétés sont même associées, V_i et V_t n'apparaissent que dans P_i et P_t respectivement, la variance de la différence est donc :

$$\frac{2k}{\Delta} \left[A_1^i \sigma^2 \right]$$

Finalement la moyenne des variances des différences des deux variétés s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{2k}{\Delta(v-1)} \left[\sum_{u=1}^m n_u A_1^1 - \sum_{u=1}^{m-1} n_u A_1^{u+1} \right] \sigma^2 \\ &= \frac{2k}{\Delta} \left[A_1^1 - \frac{\sum_{u=1}^{m-1} n_u A_1^{u+1}}{v-1} \right] \sigma^2 \end{aligned}$$

Coefficient d'efficacité.

Le coefficient d'efficacité d'un bloc incomplet est défini comme :

$$E = \frac{\text{Variance moyenne des différences de variétés dans le bloc complet}}{\text{Variance moyenne des différences de variétés dans l'estimation intra-bloc du bloc incomplet}}$$

$$= \frac{\text{Variance intra-bloc dans le bloc incomplet} = \sigma^2}{\text{Variance intra-bloc dans le bloc complet} = \sigma_1^2}$$

Chaque variété étant répétée r fois, la variance moyenne des différences de variétés dans le bloc complet, est :

$$\frac{2 \sigma_1^2}{r}$$

A - Cas du Bloc Equilibré.

$$E = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{2 \sigma_1^2}{r} \cdot \frac{\lambda v}{2k^2} = \frac{\lambda v}{K r} = \frac{v(k-1)}{k(v-1)}.$$

B - Cas du Bloc Incomplet Partiellement Equilibré.

Nous remplacerons W par 1 et W' par 0.

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{2 \sigma_1^2 (v-1)}{2k \sigma^2} \cdot \frac{\Delta}{\left[(v-1) A_1^1 - \sum_{u=1}^{m-1} n_u A_1^{u+1} \right]} \\ E &= \frac{v-1}{rk} \cdot \frac{\Delta}{(v-1) A_1^1 - \sum_{j=1}^{m-1} n_j A_1^{j+1}} \end{aligned}$$

Remarquons que nous pouvons également définir un coefficient d'efficacité à l'intérieur de chaque classe d'association : si les variétés sont $u^{\text{èmes}}$ associées, la variance de la différence est :

$$\frac{2k}{\Delta} [A_1^1 - A_1^{u+1}] \sigma^2 \quad (u \neq m)$$

et le coefficient d'efficacité correspondant :

$$E_u = \frac{1}{rk} \cdot \frac{\Delta}{A_1^1 - A_1^{u+1}}$$

Si les deux variétés sont mêmes associées, la variance de la différence est :

$$\frac{2k}{\Delta} A_1^1 \sigma^2, \quad E_m = \frac{\Delta}{rk A_1^1}$$

Applications numériques.

Les formules données pour v_i , E sont calculables par des machines électroniques. Lorsque le nombre de classes d'association est inférieur à 10, les déterminants A_1^j sont calculés en moins de vingt secondes.

Pour utiliser pratiquement, un plan d'expérience du type bloc incomplet partiellement équilibré à m classes associées, il faudra avoir toutes les caractéristiques qui se sont révélées utiles dans l'analyse, à savoir :

$$v, b, k, r, \lambda_u, n_u, A_1^j, E.$$

Nous allons donner deux exemples.

Exemple 1.

Considérons le bloc incomplet partiellement équilibré à trois classes associées, construit à l'aide de la géométrie projective finie GP (3, 2).

$$\begin{array}{llll} v = 8 & b = 12 & r = 6 & k = 4 \\ n_1 = 1 & n_2 = 3 & n_3 = 3 & \\ \lambda_1 = 3 & \lambda_2 = 2 & \lambda_3 = 3 & \end{array}$$

$$p_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad p_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad p_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous allons calculer les A_1^j :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 18 + 3 & 0 & 1 \\ -1 & 18 - 2 & -1 \\ 3 & 0 & 18 + 5 \end{vmatrix} = 21 A_1^1 - A_1^2 + 3 A_1^3$$

$$A_1^1 = 16 \cdot 23, \quad A_1^2 = 0, \quad A_1^3 = -16$$

$$v_i = \frac{23 P_i - \Sigma P_{i2}}{480}$$

$$E = \frac{7}{24} = \frac{480}{164}, \quad \boxed{E = 0,853}$$

Exemple 2.

Considérons le bloc incomplet partiellement équilibré à trois classes associées, ayant pour paramètres :

$$v = 12, \quad b = 12, \quad r = 3, \quad k = 3$$

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 6,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1.$$

$$p_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot 55 - 1 \cdot 9 - 2 \cdot 8 = 360$$

avec :

$$A_1^1 = 55, \quad A_1^2 = -9, \quad A_1^3 = -8,$$

$$\hat{v}_i = \frac{55 P_i - 9 P_{i1} - 8 P_{i2}}{360}$$

$$E = \frac{11}{9} \cdot \frac{360}{11 \cdot 55 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3} = \frac{440}{647} = 0,680$$

Analyse de certains Blocs Incomplets Partiellement Équilibrés quand un bloc manque.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, le bloc est très souvent une unité expérimentale ; par exemple l'ensemble des animaux d'une même portée. Il peut donc arriver assez fréquemment que les résultats de tout un bloc soient perdus.

Ce problème a été traité, pour les carrés latins par Yates et Hale, par Cornish pour un Bloc Incomplet Equilibré, par Marvin Zeler pour un Bloc Incomplet Partiellement Equilibré à deux classes associées seulement.

Nous allons donner une solution générale.

A - EQUATIONS DE L'ANALYSE "INTRA-BLOC" DE LA VARIANCE -

Nous supposons que le bloc manquant contenait les variétés $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Nous emploierons les mêmes notations que dans le paragraphe précédent. Pour établir l'analyse de la variance, nous distinguerons deux cas: celui où la variété envisagée apparaît dans le bloc manquant ($i \leq k$) celui où elle n'apparaît pas dans le bloc manquant, ($i > k$).

Pour $i > k$, les équations de l'analyse "intra-bloc", sont les mêmes que dans le chapitre précédent :

$$\hat{c}_i = r(k-1) \hat{v}_i - \sum_{u=1}^m \lambda_u G_{iu} = [r(k-1) + \lambda_m] \hat{v}_i - \sum_{u=1}^{m-1} (\lambda_u - \lambda_m) G_{iu}$$

compte tenu de la relation : $\hat{v}_i + \sum_{u=1}^m G_{iu} = 0$

Pour $i \leq k$, il faut ajouter aux résultats obtenus les résultats manquants. Par définition $\hat{c}_i = kV_i - T_i$, où V_i est le total des observations, pour la variété i , et T_i le total des observations pour les blocs contenant la variété i .

Il nous faudra tenir compte des observations qui n'ont pas été faites dans le bloc manquant, pour exprimer V_i et T_i . Quand la variété i apparaît dans le bloc manquant, l'équation "intra-bloc" s'écrit :

$$\hat{c}_i + (k\hat{v}_i - \sum_{s=1}^k \hat{v}_s) = r(k-1) \hat{v}_i - \sum_{u=1}^m \lambda_u G_{iu} \quad i \leq k$$

soit en tenant compte de la relation $\sum \hat{v}_i = 0$

$$\hat{c}_i + (k\hat{v}_i - \sum_{s=1}^k \hat{v}_s) = [r(k-1) + \lambda_m] \hat{v}_i - \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_m) G_{ij}$$

comme dans le paragraphe précédent, nous allons faire la somme de ces équations pour les n_j variétés qui sont jèmes associées de la variété i .

Nous appellerons m_{ij} , le nombre des jèmes associées de la variété i , qui apparaissent dans le bloc manquant.

$$\Sigma (k\hat{v}_t - \sum_{s=1}^k \hat{v}_s + \hat{c}_t) = \hat{c}_{ij} + k S_j(\hat{v}_i) - m_{ij} \Sigma \hat{v}_s$$

et, en notant $S_j(\hat{v}_i)$ la somme des résultats pour les jèmes associées de la variété i , qui apparaissent dans le bloc manquant.

$$\Sigma (\alpha \hat{v}_i - \sum_u \lambda_u G_{tu}) = -\lambda_j n_j \hat{v}_i + \sum_t \left[\alpha \delta_j^t - \sum_u \lambda_u p_{ju}^t \right] G_{it}$$

avec $\alpha = r(k-1)$. Soit en tenant compte de la relation :

$$G_{im} = -\hat{v}_i - \sum_{u=1}^{m-1} G_{iu}$$

$$-(\lambda_j n_j - \sum_u \lambda_u p_{ju}^m) \hat{v}_i + \sum_{t=1}^{m-1} [\alpha \delta_j^t - \sum_u \lambda_u (p_{ju}^t - p_{ju}^m)] G_{it}$$

Finalement, pour $i > k$, nous obtenons les m équations :

$$\hat{c}_i = [r(k-1) + \lambda_m] \hat{v}_i - \sum_{u=1}^{m-1} (\lambda_u - \lambda_m) G_{iu}$$

$$\hat{c}_{ij} + k S_j(\hat{v}_i) - m_{ij} \sum_{s=1}^k \hat{v}_s = -(\lambda_j n_j - \sum_u \lambda_u p_{ju}^m) \hat{v}_i + \sum_{t=1}^{m-1} \left[\alpha \delta_j^t - \sum_u \lambda_u (p_{ju}^t - p_{ju}^m) \right] G_{it}$$

Equations que nous écrirons sous forme matricielle :

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{C}_1$$

avec $\mathfrak{A}_1$ le vecteur colonne $\mathfrak{A}_1 = \begin{bmatrix} \hat{c}_i \\ \hat{c}_{ij} + k S_j(\hat{v}_i) - m_{ij} \sum_{s=1}^k \hat{v}_s \end{bmatrix} \quad j=1, \dots, m-1$

$\mathfrak{C}_1$ le vecteur colonne $\mathfrak{C}_1 = \begin{bmatrix} \hat{v}_i \\ G_{ij} \end{bmatrix} \quad j=1, \dots, m-1$

$\mathfrak{M}_1$ la matrice M où $W' = 0$ et $W = 1$.

De même pour $i \leq k$:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{C}_1$$

avec : $\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} \hat{c}_i - \sum_{s=1}^k \hat{v}_s \\ \hat{c}_{ij} + kS_j(\hat{v}_i) - m_{ij} \sum_s \hat{v}_s, \quad j = 1, \dots, m-1 \end{bmatrix}$

et : $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + \begin{bmatrix} -k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$

En résolvant ces deux systèmes comme dans le chapitre précédent, nous obtenons pour $\hat{v}_i$:

$$i > k \quad \hat{v}_i = \frac{1}{\Delta_1} \left[A_1^1 \hat{c}_i + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} (\hat{c}_{ij} + kS_j(\hat{v}_i) - m_{ij} \sum_s \hat{v}_s) \right]$$

où Δ_1 est le déterminant de $\mathcal{M}_1$;

et A_1^j le mineur du $j^{\text{ème}}$ terme de la première colonne.

Δ_2 sera le déterminant de $\mathcal{M}_2$; remarquons que les mineurs A_1^j sont les mêmes pour Δ_1 et Δ_2 .

Pour $i \leq k$, nous aurons donc :

$$i \leq k \quad \hat{v}_i = \frac{1}{\Delta_2} \left[A_1^1 \left(\hat{c}_i - \sum_{s=1}^k \hat{v}_s \right) + A_1^{j+1} \left(\sum \hat{c}_{ij} + kS_j(\hat{v}_i) - m_{ij} \sum_s \hat{v}_s \right) \right]$$

Ces équations sont encore inutilisables, car m_{ij} , $S_j(v_i)$ et $\sum_{s=1}^k v_s$ sont inconnus.

B - CAS OU LES VARIETES DU BLOC MANQUANT SONT
mèmes ASSOCIEES LES UNES DES AUTRES -

Nous pouvons supposer que toutes les variétés du bloc manquant sont mêmes associées les unes des autres, la classe m d'association étant, jusqu'à présent, une classe quelconque.

Soit une variété du bloc manquant, ($i = 1, \dots, k$)

$$S_m(\hat{v}_i) = \sum_{s=1}^k \hat{v}_s - \hat{v}_i, \quad m_{mi} = k - 1$$

$$S_j(\hat{v}_i) = 0, \quad j \neq m, \quad m_{ji} = 0$$

puisque les k variétés du bloc manquant sont nèmes associées les unes des autres.

Ecrivons la valeur de $\hat{v}$:

$$\begin{aligned} \Delta_2 \hat{v}_i &= A_1^1 (\hat{c}_i - \Sigma \hat{v}_s) + \Sigma A_1^{j+1} (\Sigma c_{ij} - m_{ij} \Sigma v_s) \\ &= A_1^1 \hat{c}_i + \sum_{j=1}^{m-1} A_1 \Sigma c_{ij} - A_1^1 \Sigma \hat{v}_s \end{aligned}$$

Faisons la somme de ces équations pour $i = 1, \dots, k$.

$$\Sigma \Delta_2 \hat{v}_i = \Delta_2 \Sigma \hat{v}_s = A_1^1 \Sigma \hat{c}_s + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \Sigma \Sigma c_{js} - k A_1^1 \Sigma v_s$$

comme $\Delta_2 + k A_1^1 = \Delta_1$

$$\Sigma_s \hat{v}_s = \frac{1}{\Delta_1} \left[A_1^1 \Sigma_s \hat{c}_s + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \Sigma_s \Sigma \hat{c}_{js} \right]$$

et, en remplaçant dans l'expression de $\hat{v}_i$:

$$\hat{v}_i = \frac{1}{\Delta_2} \left[A_1^1 \hat{c}_i + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \Sigma \hat{c}_{ij} \right] - \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \cdot A_1^1 \left[A_1^1 \Sigma_s \hat{c}_s + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \Sigma_s \Sigma c_{js} \right]$$

Nous obtenons, ainsi les estimations des variétés qui apparaissent dans le bloc manquant.

Pour les variétés, n'apparaissant pas dans le bloc manquant ($i > k$) nous remplacerons les quantités $S_j(\hat{v}_i)$ et $\Sigma \hat{v}_s$, par leurs estimations numériques.

Pour comparer la différence de deux variétés, nous devons non seulement tenir compte de la classe d'association, mais encore considérer les cas où les variétés apparaissent ensemble dans le bloc manquant, où l'une des deux y apparaît, où aucune n'y apparaît.

1/ - Nous supposons tout d'abord que les variétés i et t sont mêmes associées.

a) v_i et v_t apparaissent toutes les deux dans le bloc manquant

$$\hat{v}_i - \hat{v}_t = \frac{1}{\Delta_2} \left[A_1^1 (\hat{c}_i - \hat{c}_t) + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} (\Sigma \hat{c}_{ij} - \Sigma \hat{c}_{tj}) \right]$$

V_i apparaît dans $\hat{c}_i$ et $\hat{c}_{tm}$

V_t apparaît dans $\hat{c}_t$ et $\hat{c}_{im}$

donc :

$$\text{variance } (\hat{v}_i - \hat{v}_t) = \frac{2A_1^1}{\Delta_2} \sigma^2$$

b) v_i et v_t n'apparaissent ni l'une ni l'autre dans le bloc manquant :

$$\hat{v}_i - \hat{v}_t = \frac{1}{\Delta_1} \left[A_1^1 (\hat{c}_i - \hat{c}_t) + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} (\Sigma c_{ij} - \Sigma c_{tj} + kS_j(v_i) - kS_j(v_t) - (m_{ij} - m_{tj}) \Sigma \hat{v}_s) \right]$$

comme i et t sont mêmes associées V_i n'apparaissent que dans $\hat{c}_i$, et V_t dans $\hat{c}_t$.

$$\text{variance } (\hat{v}_i - \hat{v}_t) = \frac{2A_1^1}{\Delta_1} \sigma^2$$

c) v_i apparaît dans le bloc manquant, v_t n'apparaît pas dans le bloc manquant.

$$\begin{aligned} \hat{v}_i - \hat{v}_t &= \frac{1}{\Delta_2} A_1^1 \hat{c}_i + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \Sigma c_{ij} - \frac{A_1^1}{\Delta_1} (A_1^1 \Sigma \hat{c}_s + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \sum_s \Sigma c_{js}) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_1} \left[A_1^1 \hat{c}_t + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} (\Sigma c_{tj} + kS_j(v_t) - m_{tj} \Sigma v_s) \right] \end{aligned}$$

V_i apparaît dans $\hat{c}_i$, $\Sigma \hat{c}_s$, Σv_s

V_t apparaît dans $\hat{c}_t$,

$$\text{variance } (\hat{v}_i - \hat{v}_t) = 2 \sigma^2 A_1^1 \left(\frac{1}{\Delta_2} + \frac{1}{\Delta_1} \right) - \frac{A_1^{12} \sigma^2}{\Delta_1 \Delta_2} + \frac{A_1^1}{\Delta_1^2} \Sigma m_{tj} A_1^{j+1} \sigma^2$$

2/ - Les variétés v_i et v_t sont uèmes associées, $u=1, \dots, m-1$.

a) ni v_i , ni v_t n'apparaissent dans le bloc manquant.

Nous supposons que les deux variétés i et t ont M_j jèmes associées communes dans le bloc manquant.

$$\hat{v}_i - \hat{v}_t = \frac{1}{\Delta_1} \left[A_1^1 (\hat{c}_i - \hat{c}_t) + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} (\Sigma \hat{c}_{ij} - \Sigma \hat{c}_{tj} + kS_j(v_i) - kS_j(v_t) - (m_{ij} - m_{tj}) \Sigma \hat{v}_s) \right]$$

V_i apparaît dans $\hat{c}_i$, $\hat{c}_{tu}$ et dans $\Sigma \hat{v}_s$ car :

$$\Delta_1 \Sigma \hat{v}_s = A_1^1 \sum_s \hat{c}_s + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \sum_s \Sigma \hat{c}_{js}$$

comme v_i a m_{ip} pèmes associées dans le bloc manquant, V_i apparaît les m_{ip} $\hat{c}_{ps}$,

de même V_t apparaît dans $\hat{c}_t$, $\hat{c}_{tu}$ et dans les m_{tp} $\hat{c}_{ps}$.

$$\text{variance } (\hat{v}_i - \hat{v}_t) = \frac{2 \sigma^2}{\Delta_1} \left\{ A_1^1 - A_1^{u+1} - \frac{1}{\Delta_1} \left[\sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} A_1^{p+1} (m_{ij} m_{ip} + m_{tj} m_{tp}) - M_p (m_{ij} + m_{tj}) \right] \right\}$$

b) v_i apparaît dans le bloc manquant, v_t n'apparaît pas dans le bloc manquant.

$$\begin{aligned} \hat{v}_i - \hat{v}_t &= \frac{1}{\Delta_2} \left[A_1^1 \hat{c}_i + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \Sigma c_{ij} - \frac{A_1^1}{\Delta_1} (A_1^1 \Sigma \hat{c}_s + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} \sum_s \Sigma c_{js}) \right] \\ &- \frac{1}{\Delta_1} \left[A_1^1 \hat{c}_t + \sum_{j=1}^{m-1} A_1^{j+1} (\Sigma c_{tj} + k S_j (\hat{v}_t) - m_{tj} \frac{A_1^1 \Sigma c_s + \sum_{p=1}^{m-1} A_1^{p+1} \sum_s \Sigma c_{ps}}{\Delta_1}) \right] \end{aligned}$$

V_i apparaît dans $\hat{c}_i$, $\hat{c}_{tu}$, $\hat{c}_s$, $S_u(\hat{v}_t)$.

V_t apparaît dans $\hat{c}_t$, $\hat{c}_{tu}$, $\hat{c}_{ps}$.

$$\begin{aligned} \text{variance } (\hat{v}_i - \hat{v}_t) &= \left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (A_1^1 - A_1^{u+1}) \sigma^2 - \frac{k A_1^{u+1}}{\Delta_1} \sigma^2 - \frac{A_1^{12}}{\Delta_1 \Delta_2} \sigma^2 \\ &+ \frac{A_1^1}{\Delta_1^2} \sum_j m_{tj} A_1^{j+1} \sigma^2 + \frac{A_1^1}{\Delta_1 \Delta_2} \sum_j A_1^{j+1} m_{tj} \sigma^2 \\ &- \frac{\sigma^2}{\Delta_1^2} \sum_j \sum_p A_1^{j+1} A_1^{p+1} m_{tj} m_{tp} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \text{variance } (\hat{v}_i - \hat{v}_t) &= \sigma^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (A_1^1 - A_1^{u+1} + \frac{A_1^1}{\Delta_1} \sum_j A_1^{j+1} m_{tj}) \right. \\ &\left. - \frac{1}{\Delta_1} (k A_1^{u+1} + \frac{A_1^{12}}{\Delta_2} + \frac{1}{\Delta_1} \sum_j \sum_p A_1^{j+1} A_1^{p+1} m_{tj} m_{tp}) \right] \end{aligned}$$

Exemple.

Tous les Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés construits à l'aide de carrés latins orthogonaux, contiennent des blocs où toutes les variétés appartiennent à la même classe d'association.

Nous voulons construire un plan d'expérience, avec v variétés, $v = pq$, $p < q$, q étant un nombre premier, ou une puissance de nombre premier.

Dans ces conditions, il a été démontré que l'on peut construire $q(q-1)$ carrés latins orthogonaux, de q lettres, c'est-à-dire q carrés tels que, si l'on superpose deux quelconque d'entre eux, chaque couple de lettres (ou de nombres) n'apparaît qu'une fois et une seule dans tout le carré. Comme $p < q$, il a été démontré que, si l'on supprime les $p-q$ dernières lignes on obtient un bloc incomplet partiellement équilibré, avec les paramètres :

$$v = pq, b = q(q-1), k = p, r = q-1, n_1 = p-1, n_2 = q-1, \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1.$$

exemple numérique : $p = 3, q = 4$.

$$v = 12, b = 12, r = k = 3, n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 6$$

le schéma d'association est obtenu comme dans le premier chapitre, le plan d'expérience étant considéré comme quasifactoriel :

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

les 12 variétés étant représentées par un couple de nombres ij .

Le plan s'obtient à partir des 3 carrés latins orthogonaux en supprimant la dernière rangée :

1,	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2,	2	1	4	3	3	4	1	2	4	3	2	1
3,	3	4	1	2	4	3	2	1	2	1	4	3

chaque colonne est considérée comme un bloc, la variété est obtenue en ajoutant le numéro de la rangée au chiffre figurant dans le carré.

(11 22 33) (12 21 34) (13 24 31) (14 23 32)

(11 23 34) (12 24 33) (13 21 32) (14 22 31)

(11 24 32) (12 23 31) (13 22 34) (14 21 33)

$$\text{et } p_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad p_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad p_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6+1 & 1 & 1 \\ 1 & 6+1 & 1 \\ 2 & 2 & 6+2 \end{vmatrix} = 360, \quad A_1^1 = 54, \quad A_1^2 = -6, \quad A_1^3 = -6$$

$$\Delta_2 = 198$$

$$\text{variance } (v_{11} - v_{22}) = \frac{108}{98} \sigma^2, \quad \frac{6}{11} \sigma^2,$$

en supposant que le bloc (11 22 33) manque.

les variétés 12 et 32 sont premières associées, elles n'apparaissent ni l'une ni l'autre dans le bloc manquant :

posons $i = 12$, $t = 32$

$$\begin{cases} m_{i1} = 1 & m_{i2} = 1 & m_{i3} = 1 \\ m_{t1} = 1 & m_{t2} = 1 & m_{t3} = 1 \\ M_1 = 1 & M_2 = 0 & M_3 = 0 \end{cases}$$

donc, en appliquant la formule trouvée précédemment :

$$\text{variance } (v_{12} - v_{32}) = \frac{2\sigma^2}{360} \left(60 - \frac{2}{5}\right) = \frac{\sigma^2}{3}$$

BIBLIOGRAPHIE

- H. B. MANN - Analysis and design of experiments.
- Oscar KEMPTORNE - The design and analysis of experiments.
- COCHRAN, COX - Experimental designs.
- VAN DER WAERDEN - Modern algebra.
- R. C. RAO - General methods of analysis for incomplete block designs. Journal of American Statistical Association 1947, 42, P 541-5611.
- R. C. BOSE, K. R. NAIR, S. S. SHRIKHANDE - Tables of partially balanced designs with two associated classes. North Carolina Agricultural Experiment Station, 1954 Tech. Bul. N° 107.
- W. S. CONNOR, W. H. CLATWORTHY - Some theorems for partially balanced designs Annals of Mathematical Statistics 1954, 25, 100-112.
- K. R. NAIR - Certain inequality relationship among the combinatorial parameters of incomplete block design. Sankhya, 1943, 6, 255-259.
- R. C. BOSE, W. H. CLATWORTHY - Some classes of partially balanced designs. Annals of mathematical statistics. 1955, 26, 212-231.
- R. C. BOSE - Partially balanced incomplete block design with two associated classes and involving only two complete replications. Bull. Cal. Stat. Ass. 1951, 3, 120-125.
- R. C. BOSE, T. SHIMAMOTO - Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. Jour. Amer. Stat. Asso. 1952, 47, 151-184.
- P. M. ROY - On the method of inversion in the construction of partially balanced incomplete block design from the corresponding B. I. B. design. ASankya 1954, 14, 39-52.
- J. W. ARCHBOLD, N. L. JOHNSON - A method of constructing partially balanced incomplete block designs. Ann. Math. Stat. 1956, 3, 633-641.

- D. S. SPROTT - A note on combined interblock and intrablock estimation in incomplete block design. *Ann. Math. Stat.* 1956, 3, 641-643.
- O. KEMPTHORNE - The efficiency factor of an incomplete block design. *Ann. Math. Stat.* 1956, 3, 846-849.
- J. ROY, R. G. LAHA - Two associate partially balanced designs involving 3 replications. *Sankya*, aout 1956, 165-174.
- C. RADHAKRISHNA RAO - A general class of quasifactorial and related designs. *Sankya* Aout 1956, 165-174.
- Marvin ZELEN - Analysis for some partially balanced blocks designs having a missing block. *Biometrics* June 1954, vol. 10, 273-281.
- E. SEIDEN - A theorem in finite projective geometry and an application to two statistics. *Proceedings of Amer. Math. Society* April 1950, vol 1, N° 2, 282-286.
- SCHUTZENBERGER - A non existence theorem for an infinite family of symmetrical block designs. *Annals of Eugenics* 1949, 14, 286-287.
- R. C. BOSE, K. R. NAIR - Resolvable incomplete block designs with two replication. *Inst. Statist. University of North Carolina*, June 1953.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Introduction	193
CHAPITRE PRELIMINAIRE	
Définition d'un Bloc Incomplet Equilibré	198
Définition générale d'un Bloc Incomplet Partiellement Equilibré	201
CHAPITRE I	
CONSTRUCTIONS DE PLANS D'EXPERIENCE A PLUS DE 2 CLASSES ASSOCIEES	204
Constructions utilisant les Géométries projectives finies	204
Constructions à l'aide de treillis circulaires	209
Constructions de plans d'expérience quasifactoriels de dimension n	216
CHAPITRE II	
CONDITIONS D'EXISTENCE DE BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRES A 2 CLASSES ASSOCIEES	222
Etude de la matrice d'incidence d'un Bloc Incomplet Partiellement Equilibré	222
Conditions d'existence d'un bloc incomplet partiellement équilibré dans le cas où b est inférieur à v	225

CHAPITRE III

BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRES A 4 REPETITIONS	233
Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés où $r=4$ et $k=2$	235
Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés où $r=4$ et $k=3$	239
Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés où $r=4$ et $k=4$	244
Blocs Incomplets Partiellement Equilibrés où $r=4$ et $k=4$	255
Conclusion	259

CHAPITRE IV

ANALYSE DE LA VARIANCE D'UN BLOC INCOMPLET PAR- TIELLEMENT EQUILIBRE A m CLASSES ASSOCIEES	264
Estimation "intra-bloc"	265
Estimation "inter-bloc"	267
Estimation combinée	268
Cas du bloc incomplet équilibré	269
Cas du bloc incomplet partiellement équilibré	270
Coefficient d'efficacité	273
Applications numériques	274
ANALYSE DE CERTAINS BLOCS PARTIELLEMENT EQUI- LIBRES, QUAND UN BLOC MANQUE	275
Equations de l'analyse "intra-bloc" de la variance	276
Cas où les variétés du bloc manquant sont mèmes asso- ciées	278
Exemples	282
BIBLIOGRAPHIE	284

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

PROBLEME DE RIEMANN HILBERT.

Vu et approuvé
Paris, le 25 Mai 1958
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
J. PERES

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean SARRAILH

IMP. LOUIS-JEAN — GAP (H.-A.)

